1 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

1.1 Definicije vezane za diferencijalne jednačine po jednoj promenljivoj

Neka je data funkcija $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ za $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Tada implicitna jednačina

$$(*) \qquad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

po nepoznatoj funkciji jedne promenljive (za koju postoje razmatrani izvodi)

$$y = y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se naziva *implicitno zadana diferencijalna jednačina* n*-tog reda po jednoj promenljivoj* $x \in (\alpha, \beta)$.

Prirodan broj n se naziva *red diferencijalne jednačine.*

Primer 1.1.

1. *Diferencijalna jednačina*

$$y'' - 3(y')^2 + x^4 - y''' = 0$$

je reda $n = 3$.

2. *Diferencijalna jednačina*

$$(y - y'')(y + y'') + (y'')^2 + y' + y = 0$$

je reda $n = 1$.

Definicija 1.2. Rešenje diferencijalne jednačine $(*)$ *je svaka funkcija* $y = y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *za koju jednakost* $(*)$ *važi za svako* $x \in (\alpha, \beta)$*, tj.* $(*)$ *predstavlja identitet.*

Primer 1.3. *Za diferencijalnu jednačinu*

$$y'' - 1 = 0$$

jedno rešenje je

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Takođe rešenja su

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

za ma koje realne konstante C_1 *i* C_2.

Definicija 1.4. Opšte rešenje diferencijalne jednačine $(*)$ n-tog reda *je svaka funkcija* $y = y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ *koja ispunjava implicitnu jednačinu*

$$(**) \qquad \Phi(x, y(x), C_1, \ldots, C_n) = 0,$$

za konstante $C_1, \ldots, C_n \in \overline{\mathbb{R}}$, *takve da važi uslovi*:

1. *funkcija* $y = y(x)$ *jeste rešenje diferencijalne jednačine* $(*)$;

2. *diferencijalna jednačina* $(*)$ *se može dobiti iz implicitne jednačine* $(**)$.

Napomena 1.5. *Često se umesto implicitno zadane jednačine* $(**)$ *razmatra, ukoliko postoji, ekvivalentna eksplicitno zadana funkcija* $y = y(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ *(za konstante* $C_1, \ldots, C_n \in \overline{\mathbb{R}}$*) sa istim uslovima iz prethodne definicije.*

Primer 1.6. *Za diferencijalnu jednačinu*

$$(1) \qquad F(x, y, y', y'') = y'' - 2y' + y = 0$$

opšte rešenje je

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

za ma koje realne konstante C_1 *i* C_2 *jer za funkciju* $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ *i implicitnu jednačinu*

$$(2) \qquad \Phi(x, y, C_1, C_2) = y - (C_1 e^x + C_2\, x\, e^x) = 0$$

je ispunjeno:

1. *Funkcija* $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ *jeste rešenje diferencijalne jednačine* (1) ;

2. *Diferencijalna jednačina* (1) *se može dobiti iz implicitne jednačine* (2)*. Navedeno znači sledeće da iz sledećeg sistema uslova*:

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, C_1, C_2) = y' - (C_1 e^x + C_2(1 + x)e^x) \underset{(2)}{=} 0,$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x, y, C_1, C_2) = y'' - (C_1 e^x + C_2(2 + x)e^x) \underset{(2)}{=} 0$$

dobijamo sistem po koeficijentima:

$$C_1\, e^x + C_2\, (1 + x)\, e^x = y',$$
$$C_1\, e^x + C_2\, (2 + x)\, e^x = y''$$

sa rešenjima:

$$C_1 = \psi_1(x, y, y', y'') = \frac{-y'' + 2y' - x(y'' - y')}{e^x} \wedge C_2 = \psi_2(x, y, y', y'') = \frac{y'' - y'}{e^x}.$$

Zamenom $C_1 = \psi_1(x, y, y', y'') = \dfrac{-y'' + 2y' - x(y'' - y')}{e^x}$ *i* $C_2 = \psi_2(x, y, y', y'') = \dfrac{y'' - y'}{e^x}$ *u* (2) *dobijamo*:

$$\Phi\big(x, y, C_1, C_2\big) = y - \left(\frac{-y'' + 2y' - x(y'' - y')}{e^x} \cdot e^x + \frac{y'' - y'}{e^x} \cdot x\, e^x\right) = 0$$

i odatle dobijamo polaznu diferencijalnu jednačinu (1):

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Nadalje, u konkretnim primerima, diferencijalnih jednačina $n-$tog reda ne tražimo proveru opštosti rešenja $y = \varphi(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$.

Definicija 1.7. Partikularno rešenje *diferenijalne jednačine* $(*)$ *je rešenje koje se dobija iz opšteg za specijalan izbor konstanti.*

Primer 1.8. *Za diferencijalnu jednačinu*

$$F(x, y, y', y'') = y'' - 1 = 0$$

opšte rešenje je

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

za ma koje realne konstante C_1 *i* C_2*, specijalno izborom* $C_1 = 0$ *i* $C_2 = 0$ *dobijamo jedno partikularno rešenje*

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Definicija 1.9. Singularno rešenje *diferenijalne jednačine* $(*)$ *je rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg ni jedan izbor konstanti.*

Definicija 1.10. Integralna kriva *je svako partikularno ili singularno rešenje diferenijalne jednačine* $(*)$.

Primer 1.11. *Diferencijalna jednačina prvog reda*

(1)
$$F(x, y, y') = x\left((y')^2 + 1\right) - 2yy' = 0,$$

ima opšte rešenje

(2)
$$y = y(x) = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2},$$

za konstantu $C \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *i singularno rešenje*

(3)
$$y = y(x) = x.$$

Primetimo da za fiksirano $C > 0$ *i* $x \neq C$ *važi:*

$$y = y(x) = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2} > x \Big/ \underbrace{\cdot 2C}_{>0} \iff (x - C)^2 > 0.$$

Potpuno analogno za fiksirano $C < 0$ *i* $x \neq C$ *važi:*

$$y = y(x) = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2} < x \Big/ \underbrace{\cdot 2C}_{<0} \iff (x - C)^2 > 0.$$

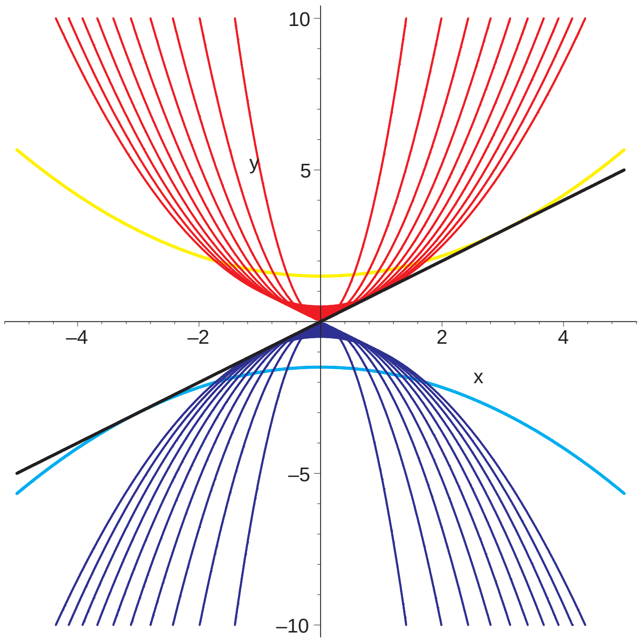
Samim tim i aritmetički je dokazano da prava $y = x$ *nije element familije parabola* $y = \dfrac{x^2}{2C} + \dfrac{C}{2}$. *Na kraju ovog primera napomenimo da za proizvoljno* $C \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ *tačka* $M_C = (C, C)$ *pripada paraboli* $y = \dfrac{x^2}{2C} + \dfrac{C}{2}$ *i tangenta u tački* $M_C = (C, C)$ *na parabolu je upravo singularno rešenje:*

$$y = y(x) = x.$$

Napomenimo da za posmatranu diferencijalnu jednačinu postoji i drugo singularno rešenje:

$$y = y(x) = -x$$

za koje važe analogni zaključci.



Integralne krive diferencijalne jednačine.

Definicija 1.12. *Za diferencijalnu jednačinu* $(*)$ *n-tog reda* Košijevo rešenje *je ono rešenje* $y = y(x)$ *koje ispunjava sledeće početne uslove*:

$$\begin{aligned}
&y(x_0) = y_0,\\
&y'(x_0) = y_1,\\
&\vdots\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1};
\end{aligned}$$

za unapred zadanu tačku $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *i vrednosti* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Prethodna lista uslova određuje* Košijeve početne uslove.

1.2 Metode rešavanja diferencijalnih jednačina po jednoj promenljivoj

1. Diferencijalne jdnačine I reda - načini zadavanja

Diferencijalne jednačine I reda se određuju u *implicitnom obliku*:

$$F(x, y, y') = 0,$$

za $F : D_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ za $D_3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Rešavajuću prethodnu jednačinu po y', ukoliko je moguće, tada diferencijalnu jednačinu I reda određujemo u *eksplicitnom obliku*:

$$y' = f(x, y),$$

za $f : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ za $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Dalje, na osnovu zapisa izvoda preko diferencijala

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

za

$$f(x) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

za neke funkcije $P, Q : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, za $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ i pri tom $Q \neq 0$, dobijamo diferencijalnu jdnačininu I reda u *diferencijalnom obliku*:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

2. Diferencijalne jednačine I reda - metode rešavanja

Navodimo metode rešavanja diferencijalnih jednačina I reda u nekim standardnim tipovima.

***(i)* Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive** određena je u jednom od oblika:

$$y' = f(x)g(y) \iff \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \iff \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx,$$

za neke funkcije $f\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, za nele intervale $D_1, E_1 \subseteq \mathbb{R}$ i $g(x) \neq 0$. Ova diferencijalna jednačina svodi se na direktnu integraciju

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Zadatak 1. *Rešiti diferencijalnu jednačinu:*

$$y' = \frac{x}{y}\, e^{x^2-y^2}.$$

Rešenje. Važi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\, e^{x^2} \cdot e^{-y^2} \implies y\, e^{y^2} dy = x\, e^{x^2} dx.$$

Odatle integracijom

$$\int y\, e^{y^2} dy = \int y\, e^{y^2} dy$$

dobijamo opšte rešenje u implicitnom obliku

$$e^{y^2} = e^{x^2} + C,$$

za neku realnu konstantu C. Opšte rešenje u eksplicitnom obliku je dato sa

$$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{\ln(e^{x^2} + C)}}. \qquad \square$$

***(ii)* Homogene diferencijalne jednačine** određene su u eksplicitnom obliku:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

za neko $f\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ i za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Rešavaju se smenom

$$u = \frac{y}{x} \implies y = ux \implies y' = u'x + u,$$

preko pomoćne funkcije $u = u(x)$, svodeći je na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive. Homogene diferencijalne jednačine u diferencijalnom obliku:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

su takve da za funkcije $P, Q\colon D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, gde $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, je ispunjen uslov homogenosti

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x,y) \quad \text{i} \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x,y).$$

za neki prirodan broj n.

Zadatak 2. *Rešiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Rešenje. Funkcije $P(x,y) = x^2 - 3y^2$ i $Q(x,y) = 2xy$ jesu homogene stepena homogenosti $n = 2$. Samim tim dobijamo

$$(1) \qquad (x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 \Big/ : x^2 dx$$

$$(2) \qquad \Longrightarrow \qquad 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\,\frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3) \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}$$

Za $y = y(x)$ funkcija $u = u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ određuje smenu

$$(4) \qquad u = \frac{y}{x} \;\Longrightarrow\; y = u\,x \;\Longrightarrow\; y' = u'x + u$$

i odatle zaključujemo da se jednačina (2) može smenom (4) svesti na oblik diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive

$$\begin{aligned} & 1 - 3u^2 + 2u\,(u'x + u) = 0 \\ \Longrightarrow\quad & 1 - 3u^2 + 2uxu' + 2u^2 = 0 \\ \Longrightarrow\quad & 2uxu' = u^2 - 1 \\ \Longrightarrow\quad & 2ux\frac{du}{dx} = u^2 - 1 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{2u}{u^2-1}du = \frac{1}{x}dx \\ \Longrightarrow\quad & \ln|u^2 - 1| = \ln|x| + C, \end{aligned}$$

za neku realnu konstantu C. Neka je $C = \ln C_1$, za $C_1 > 0$, tada nalazimo opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine u implicitnom obliku:

$$\begin{aligned} & \ln|u^2 - 1| = \ln|x| + \ln C_1 \\ \Longrightarrow\quad & u^2 - 1 = C_1 x \\ \Longrightarrow\quad & \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 = C_1 x \\ \Longrightarrow\quad & \boldsymbol{y^2 - x^2 = C_1 x^3}. \end{aligned}$$

□

***(iii)* Uopštene homogene diferencijalne jednačine** određene su u eksplicitnom obliku:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

za neko $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ i za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ za neke realne konstante $a_{1,2}, b_{1,2}, c_{1,2}$. Razlikujemo:

1. Ako je:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

uvodi se smena:

$$x = u + h,\ y = v + k,$$

gde je $v = v(u)$ pomoćna funkcija i h, k brojevi koji su rešenja sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \\ a_2 h + b_2 k + c_2 = 0. \end{array} \right\}$$

U tom slučaju posmatrana diferencijalna jednačina se transformiše u jednostavniji eksplicitni oblik:

$$v' = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right),$$

što je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive i rešava se sa smenom $w = \dfrac{v}{u}$, odakle nalazimo $v' = v'_u = w'_u u + w$.

2. Ako je:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

uz dodatnu pretpostavku $a_1 \neq 0$, uvodi se smena:

$$u = a_1 x + b_1 y$$

gde je $u = u(x)$ pomoćna funkcija. U tom slučaju je $u' = u'_x = a_1 + b_1 y'$ i posmatrana diferencijalna jednačina se transformiše u eksplicitni oblik diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive:

$$u' = a_1 + b_1 f\left(\frac{u + c_1}{\frac{a_2}{a_1} u + c_2}\right).$$

Zadatak 3. *Rešiti diferencijalne jednačine*:

(*i*)

$$y' = \frac{4x - y - 1}{-x + y - 2},$$

(*ii*)

$$y' = \frac{x + y + 1}{3x + 3y + 1}.$$

Rešenje. (*i*) Na osnovu $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ neophodno je uvesti smenu

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

za neke funkcije $u = u(x)$ i $v = v(y)$ i neke konstante h i k (ako su h i k konstante onda mora biti $u = u(x)$ i $v = v(y)$). Primetimo

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v + k)}{d(u + h)} = \frac{dv}{du} = v'_u = v'.$$

Samim tim

$$y' = \frac{4x-y-1}{-x+y-2} \iff v' = \frac{4(u+h)-(v+k)-1}{-(u+h)+(v+k)-2}$$
$$\iff v' = \frac{4u-v+(4h-k-1)}{-u+v+(-h+k-2)}.$$

Rešavamo prethodnu diferencijalnu jednačinu pri izboru konstanti h i k takvih da

$$\left\{ \begin{array}{c} 4h-k-1=0, \\ -h+k-2=0; \end{array} \right\}$$

tj. za

$$h=1 \quad \text{i} \quad k=3.$$

Za takav izbor konstanti diferencijalna jednačina

$$v'_u = \frac{4u-v}{-u+v} = \frac{4-\frac{v}{u}}{-1+\frac{v}{u}}$$

jeste jedna homogena diferencijalna jednačina koja se rešava smenom

$$w = \frac{v}{u},$$

odakle nalazimo

$$v'_u = w'_u u + w.$$

Samim tim dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive

$$v'_u = \frac{4u-v}{-u+v} \iff w'_u u + w = \frac{4u-wu}{-u+wu}$$
$$\iff w'_u = \frac{1}{u}\left(\frac{4-w}{-1+w} - w\right)$$
$$\iff \frac{dw}{du} = \frac{1}{u} \cdot \frac{4-w^2}{w-1}$$
$$\iff \frac{w-1}{4-w^2}dw = \frac{1}{u}du.$$

Integracijom

$$\int \frac{w-1}{4-w^2}\,dw = \int \frac{w}{4-w^2}\,dw - \int \frac{1}{4-w^2}\,dw = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$\iff -\frac{1}{2}\ln|4-w^2| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+w}{2-w}\right| = \ln|u| + \ln C_1,$$

za neku konstantu $C_1 > 0$, nalazimo

$$(2-w)(2+w)^3 = \frac{1}{(C_1 u)^4}.$$

Konačno, dobijamo opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{C_1^4(4x^2-8x-y^2+6y-5)(2x+y-5)=1}.$$

(ii) Opšte rešenje posmatrane diferencijalne jednačine je dato sa

$$\boldsymbol{3y + x + \ln|x+y| = 2\,C},$$

za neku realnu konstantu C. $\square$

***(iv)* Linearna diferencijalna jednačina** je diferencijalna jednačina oblika*):

$$(*) \qquad y' + P(x)y = Q(x),$$

za neprekidne funkcije $P, Q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $Q(x) = 0$ za svako $x \in D_1$, tada se radi o *homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini I reda*. Inače ako je $Q(x) \neq 0$ za neko $x \in D_1$, tada se radi o *nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini I reda*.

Formula opšteg rešenja je data sa sledećim tvrđenjem.

Teorema 1.13. *Opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine*

$$(*) \qquad y' + P(x)\,y = Q(x),$$

gde su $P = P(x)$ i $Q = Q(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, je dato formulom:

$$y = \left(C + \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx\right) \cdot e^{-\int P(x)\,dx},$$

za neku realnu konstantu C. Posebno za Košijev početni uslov

$$y(x_0) = y_0,$$

za ma koju tačku $x_0 \in D_1$ i fiksiranu vrednost $y_0 \in \mathbb{R}$, Košijevo rešenje je dato formulom:

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} dx\right) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}.$$

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja:

***(i)* $\boldsymbol{Q(x) \equiv 0}$.** Tada se radi o diferenijalnoj jednačini

$$y' + P(x)\,y = 0.$$

Navedena formula za $Q(x) = 0$ i $C = 0$ specijalno određuje trivijalno rešenje. Nadalje pretpostavljamo da je y netrivijalno rešenje. Važi

$$\begin{aligned} y' + P(x)\,y = 0 \ &\Longrightarrow \ \frac{y'}{y} = -P(x) \\ &\Longrightarrow \ \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln|C| \qquad (C \neq 0 - const.) \\ &\Longrightarrow \ y = Ce^{-\int P(x)\,dx}, \end{aligned}$$

***(ii)* $\boldsymbol{Q(x) \not\equiv 0}$.** Množenjem

$$y' + P(x)\,y = Q(x) \ \Big/ \cdot e^{\int P(x)dx}$$

---

*)koji nije formalno eksplicitni oblik

zaključujemo

$$
\begin{aligned}
& y' \cdot e^{\int P(x)\,dx} + P(x)\, y \cdot e^{\int P(x)\,dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx} \\
\Longleftrightarrow \quad & y' \cdot e^{\int P(x)\,dx} + y \cdot e^{\int P(x)\,dx} P(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx} \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(y\, e^{\int P(x)\,dx} \right)' = Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} \\
\Longrightarrow \quad & y\, e^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx + C \qquad (C - const.) \\
\Longrightarrow \quad & y = e^{-\int P(x)\,dx} \left(C + \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx}\, dx \right),
\end{aligned}
$$

za neku realnu konstantu C. Evidentno je da Košijevo rešenje koje ispunjava zadati početni uslov dato formulom

$$
y = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}\, dx \right) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx}.
$$

Drugi metod za određivanje Košijevog rešenja je da se odredi konstanta C iz opšteg rešenja tako da je ispunjen početni uslov $y(x_0) = y_0$. ■

Zadatak 4. *Rešiti diferencijalne jednačine*:

(i)

$$
y' + \frac{1}{x} y = 3x,
$$

(ii)

$$
2y dx + (y^2 - 2x) dy = 0.
$$

Rešenje. (i) Za funkciju $P = P(x) = \dfrac{1}{x} : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subset R \backslash \{0\}$ i za funkciju $Q = Q(x) = 3x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ prema formuli opšteg rešenja

$$
\begin{aligned}
y &= \left(C + \int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx \right) e^{-\int P(x)\,dx} = \left(C + \int 3x\, e^{\int \frac{1}{x}\,dx} dx \right) e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} \\
&= \left(C + \int 3x\, e^{\ln|x|} dx \right) e^{-\ln|x|} = \left(C + \int 3x|x|\, dx \right) \frac{1}{|x|} = \left(\boldsymbol{C} + |\boldsymbol{x}|^{\mathbf{3}} \right) \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{x}|},
\end{aligned}
$$

pri čemu $x \neq 0$. Napomenimo da se jednakost $\int 3x|x|\, dx = |x|^3 + C_1$ (gde je $C_1 - const.$) jednostavno proverava razlikovanjem slučajeva u zavisnosti od znaka x nad intervalom koji ne sadrži nulu i nad kojim se razmatra ovaj integral.

(ii) Polazeći od diferencijalnog oblika

$$
2y dx + (y^2 - 2x) dy = 0
$$

moguća su dva ekvivalentna eksplicitna oblika

$$
y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{-y^2 + 2x}
$$

i

$$\begin{aligned}
x'_y = \frac{dx}{dy} &= \frac{-y^2+2x}{2y} \\
&= \frac{2x-y^2}{2y} = \frac{1}{y}x - \frac{y}{2} \\
\Longrightarrow \quad x'_y + \underbrace{\Big(-\frac{1}{y}\Big)}_{P(y)}\, x &= \underbrace{\Big(-\frac{y}{2}\Big)}_{Q(y)}.
\end{aligned}$$

Drugi oblik diferencijalne jednačine jeste primer linearne diferencijalne jednačine po funkciji $x = x(y)$. Po formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned}
x = x(y) &= \bigg(C + \int Q(y)\, e^{\int P(y)\,dy} dy\bigg) \cdot e^{-\int P(y)\,dy} \\
&= \bigg(C + \int \Big(-\frac{y}{2}\Big)\, e^{\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy} dy\bigg) \cdot e^{-\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy} \\
&= \bigg(C + \int \Big(-\frac{y}{2}\Big)\, e^{-\ln|y|} dy\bigg) \cdot e^{\ln|y|} \\
&= \bigg(C - \frac{1}{2}\int \frac{y}{|y|}\, dy\bigg)|y| \\
&= \Big(C - \frac{1}{2}|y|\Big)|y| \\
&= \boldsymbol{C|y| - \frac{1}{2}y^2},
\end{aligned}$$

pri čemu $y \neq 0$. Napomenimo da se jednakost $\displaystyle\int \frac{y}{|y|}\, dy = |y| + C_1$ (gde je $C_1 - const.$) jednostavno proverava razlikovanjem slučajeva u zavisnosti od znaka y nad intervalom koji ne sadrži nulu i nad kojim se razmatra ovaj integral.

Zadatak 5. *Naći Košijeva rešenja sledećih diferencijalnih jednačina*:

(i)

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x, \quad y(2) = 1;$$

(ii)

$$2y dx + (y^2 - 2x)dy = 0, \quad y(1) = 2.$$

Rešenje. (i) Zamenom u opšte rešenje iz prethodnog zadatka

$$y = y(x) = \big(C + |x|^3\big)\,\frac{1}{|x|}$$

nalazimo vrednost konstante $y(2) = 1 \Longleftrightarrow (C+8)\,\dfrac{1}{2} = 1 \Longleftrightarrow \boldsymbol{C = -6}$ i time Košijevo rešenje

$$y = y(x) = \frac{|x|^3 - 6}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

(ii) Zamenom u opšte rešenje iz prethodnog zadatka

$$x = x(y) = C|y| - \frac{1}{2}y^2$$

nalazimo vrednost konstante $y(1) = 2 \iff x(2) = 1 \iff C|2| - \frac{1}{2}|2|^2 = 1 \iff \boldsymbol{C = \frac{3}{2}}$ i time Košijevo rešenje

$$x = x(y) = \frac{3}{2}|y| - \frac{1}{2}y^2, \quad y \neq 0.$$

(v) Bernulijeva diferencijalna jednačina je diferencijalna jednačina oblika*):

$$(*) \qquad y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

za neprekidne funkcije $P, Q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde je Q ne-nula funkcija i pri tom $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$.

Teorema 1.14. *Bernulijeva diferencijalna jednačina*:

$$(*) \qquad y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

za neprekidne funkcije $P, Q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *za neki interval* $D_1 \subseteq \mathbb{R}$*, gde je* Q *ne-nula funkcija i pri tom* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$*, smenom:*

$$z = z(x) = y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^\alpha} \implies z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = \frac{1-\alpha}{y^\alpha}y'.$$

se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu:

$$(**) \qquad z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

Dokaz. Za $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ važi:

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^\alpha \,\big/ : y^\alpha \implies \frac{y'}{y^\alpha} + P(x)\, y^{1-\alpha} = Q(x).$$

Uvodeći smenu $z = z(x) = y^{1-\alpha}$ dobijamo $z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}\, y' = (1-\alpha)\, \frac{y'}{y^\alpha}$, čime se polazna Bernulijeva diferencijalna jednačina svodi na linearnu diferencijalnu jedanačinu:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x) \iff z' + \underbrace{(1-\alpha)\, P(x)}_{P_1(x)}\, z = \underbrace{(1-\alpha)\, Q(x)}_{Q_1(x)},$$

sa neprekidnim funkcijama $P_1, Q_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. ∎

Napomena 1.15. *Nalazeći opšte rešenje* $z = z(x)$ *linearne diferencijalne jednačine* $(**)$ *i vraćajući smenu* $z = y^{1-\alpha}$ *nalazimo* $y = y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ *kao opšte rešenje Bernulijeve diferencijalne jednačine* $(*)$*.*

Zadatak 6. *Rešiti diferencijalne jednačine*:

(i)

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y},$$

(ii)

$$2ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0.$$

Rešenje. (i) Posmatrana diferencijalna jednačina

$$y' + \underbrace{\frac{x}{1-x^2}}_{P(x)}\, y = \underbrace{x}_{Q(x)}\, y^{1/2},$$

*)koji nije formalno eksplicitni oblik

jeste Bernulijeva diferencijalna jednačina po funkciji $y = y(x)$ sa parametrom $\boldsymbol{\alpha = 1/2}$. Samim tim posmatrana Bernulijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom

$$z = z(x) = y^{1-\alpha} = y^{1-1/2} = y^{1/2} = \sqrt{y} \implies y = z^2$$

svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu. Zaista

$$\begin{aligned} y' + \frac{x}{1-x^2} y = x\sqrt{y} \quad &\iff \quad (z^2)' + \frac{x}{1-x^2} z^2 = x\sqrt{z^2} \\ &\iff \quad 2\,z\,z' + \frac{x}{1-x^2} z^2 = xz \;\Big/ : z \;\left(= y^{1/2}\right) \\ &\iff \quad 2\,z' + \frac{x}{1-x^2} z = x \;\Big/ : 2 \\ &\iff \quad z' + \underbrace{\frac{x}{2(1-x^2)}}_{P_1(x)}\, z = \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{Q_1(x)}. \end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned} z = z(x) &= \left(C + \int Q_1(x)\, e^{\int P_1(x)\,dx} dx\right) e^{-\int P_1(x)\,dx} \\ &= \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{\int \frac{x}{2(1-x^2)}\,dx} dx\right) e^{-\int \frac{x}{2(1-x^2)}\,dx} \\ &= \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{-\frac{1}{4}\ln|1-x^2|} dx\right) e^{\frac{1}{4}\ln|1-x^2|} \\ &= \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{\ln\left(1/|\sqrt[4]{1-x^2}|\right)} dx\right) e^{\ln|\sqrt[4]{1-x^2}|} \\ &= \left(C + \int \frac{x}{2}\, \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} dx\right) \sqrt[4]{1-x^2}, \qquad x \in D_1 = (-1,1)\,. \end{aligned}$$

Dalje, za $x \in D_1 = (-1,1)$ nalazimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z = z(x)} &= \left(C - \frac{1}{4}\int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt[4]{1-x^2}} dx\right) \sqrt[4]{1-x^2} \\ &= \left(C - \frac{1}{4}\int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}} d\left(1-x^2\right)\right) \sqrt[4]{1-x^2} \\ &= \left(C - \frac{1}{4}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{4}}}{3/4}\right) \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \boldsymbol{C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)}. \end{aligned}$$

Samim tim, na osnovu $y = z^2$, nalazimo opšte rešenje Bernulijeve diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{y = y(x) = \left(C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\right)^2}, \quad x \in D_1 = (-1,1)\,.$$

(ii) Polazeći od diferencijalnog oblika

$$y dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right) dy = 0$$

moguća su dva ekvivalentna eksplicitna oblika

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x + \frac{1}{2}x^3 y}$$

i

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{-x + \frac{1}{2}x^3 y}{y} = -\frac{1}{y}x + \frac{1}{2}x^3$$

$$\Longrightarrow \quad x'_y + \underbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}_{P_1(y)} x = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{Q_1(y)} x^3.$$

Drugi oblik diferencijalne jednačine jeste Bernulijeva diferencijalna jednačina po funkciji $x = x(y)$ sa parametrom $\boldsymbol{\alpha = 3}$. Samim tim posmatrana Bernulijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom

$$z = z(y) = x^{1-\alpha} = x^{1-3} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$$

svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu. Zaista

$$\begin{aligned}
x' + \frac{1}{y}x = \frac{1}{2}x^3 \quad & \Longleftrightarrow \quad \left(z^{-\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{y}\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3} \\
& \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\, z^{-\frac{3}{2}}\, z' + \frac{1}{y}\, z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, z^{-\frac{3}{2}} \;\Big/ : z^{-\frac{3}{2}} \\
& \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\, z' + \frac{1}{y}\, z = \frac{1}{2} \;\Big/ : \left(-\frac{1}{2}\right) \\
& \Longleftrightarrow \quad z' + \underbrace{\left(-\frac{2}{y}\right)}_{P_1(y)} z = \underbrace{(-1)}_{Q_1(y)}.
\end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z = z(y)} &= \left(C + \int Q_1(y)\, e^{\int P_1(y)\, dy} dy\right) e^{-\int P_1(y)\, dy} \\
&= \left(C + \int (-1)\; e^{\int \left(-\frac{2}{y}\right) dy} dy\right) e^{-\int \left(-\frac{2}{y}\right) dy} \\
&= \left(C - \int e^{-2\ln|y|} dy\right) e^{\,2\ln|y|} \\
&= \left(C - \int e^{\,\ln\left(1/y^2\right)} dy\right) e^{\,\ln y^2} \\
&= \left(C - \int \frac{1}{y^2}\, dy\right) y^2 \\
&= \left(C + \frac{1}{y}\right) y^2 \\
&= \boldsymbol{C y^2 + y}.
\end{aligned}$$

Samim tim, na osnovu $x = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$, nalazimo opšte rešenje Bernulijeve diferencijalne jednačine
$$\boldsymbol{x = x(y) = \frac{1}{Cy^2 + y}}. \qquad \square$$

***(vi)* Rikatijeva diferencijalna jednačina** je diferencijalna jednačina eksplicitnog oblika:
$$(*) \qquad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$
za neprekidne funkcije $P, Q, R \colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ nad domenom nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde su P i Q ne-nula funkcije. U opštem slučaju se ne rešava u kvadraturama, tj. u konačno mnogo koraka integracije.

Teorema 1.16. *Neka je*
$$y_p = y_p(x)$$
jedno partikularno rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine
$$(*) \qquad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$
za neprekidne funkcije $P, Q, R \colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ nad domenom nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde su P i Q ne-nula funkcije. Smenom
$$z = z(x) = \frac{1}{y - y_p} \implies y = y_p + \frac{1}{z},$$
Rikatijeva diferencijalna jednačina $(*)$ se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu
$$(**) \qquad z' + \big(2y_pP(x) + Q(x)\big)z = \big(-P(x)\big).$$

Dokaz. Neka je $y_p = y_p(x)$ jedno partikularno rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine, tada za funkciju $y_p = y_p(x)$ je ispunjeno
$$(*)_p \qquad y_p' = P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x).$$
Neka je $z = z(x)$ funkcija takva da je $z = z(x) = \dfrac{1}{y - y_p}$. Tada na osnovu
$$y = y_p + \frac{1}{z} \implies y' = y_p' - \frac{z'}{z^2},$$
zaključujemo
$$\begin{aligned}
&\underbrace{y_p' - \frac{z'}{z^2}}_{y'} = P(x)\underbrace{\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2}_{y^2} + Q(x)\underbrace{\left(y_p + \frac{1}{z}\right)}_{y} + R(x)\\
\underset{(*)_p}{\implies}\ &\underbrace{P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x)}_{y_p'} - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + R(x)\\
\implies\ &P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x) - \frac{z'}{z^2} = P(x)y_p^2 + 2P(x)y_p\frac{1}{z} + P(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)y_p + Q(x)\frac{1}{z} + R(x)\\
\implies\ &-\frac{z'}{z^2} = 2P(x)y_p\frac{1}{z} + P(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)\frac{1}{z} \quad \big/\cdot(-z^2)\\
\implies\ &z' = -2P(x)y_p\,z - P(x) - Q(x)\,z\\
\implies\ &z' + \underbrace{\big(2P(x)y_p + Q(x)\big)}_{P_2(x)}\,z = \underbrace{\big(-P(x)\big)}_{Q_2(x)}.
\end{aligned}$$
sa neprekidnim funkcijama $P_2, Q_2 \colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Napomena 1.17. *Nalazeći opšte rešenje $z = z(x)$ linearne diferencijalne jednačine* $(**)$ *i vraćajući smenu* $z = \dfrac{1}{y - y_p}$ *nalazimo* $y = y(x) = y_p(x) + \dfrac{1}{z(x)}$ *kao opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine* $(*)$.

Zadatak 7. *Rešiti diferencijalne jednačine*:
(i)
$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2},$$
tražeći partikularno rešenje u obliku $y_p = A/x$ *za* $A \in \mathbb{R}$*;*
(ii)
$$dx + (x^2 - y^2 - 1)dy = 0,$$
tražeći partikularno rešenje u obliku $x_p = By$ *za* $B \in \mathbb{R}$.

Rešenje. (i) Posmatrana diferencijalna jednačina
$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2},$$
jeste Rikatijeva diferencijalna jednačina po funkciji $y = y(x)$ i pri tom se zna oblik partikularnog rešenja $y_p = A/x$ za $A \in \mathbb{R}$. Prvo određujemo konstantu A na osnovu
$$\begin{aligned}
y_p' = \frac{1}{2}y_p^2 + \frac{1}{2x^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{A}{x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x}\right)^2 + \frac{1}{2x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{A}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{A^2}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \ \Big/ \cdot 2x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad -2A = A^2 + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (A+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A = -1}.
\end{aligned}$$
Samim tim partikularno rešenje je funkcija
$$\boldsymbol{y_p = -\frac{1}{x}}.$$
Znajući jedno partikularno rešenje y_p posmatrana Rikatijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom
$$\boldsymbol{z = \frac{1}{y - y_p} \quad \Longrightarrow \quad y = y_p + \frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}$$
svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu po funkciji $z = z(x)$. Zaista
$$\begin{aligned}
y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{2x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} + (z^{-1})' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} - z^{-2}z' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{xz} + \frac{1}{2z^2} \ \Big/ \cdot (-z^2) \\
&\Longleftrightarrow \quad z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad z' + \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{P_2(x)} z = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{Q_2(x)}.
\end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{z = z(x)} &= \left(C + \int Q_2(x)\, e^{\int P_2(x)\,dx} dx \right) e^{-\int P_2(x)\,dx} \\
&= \left(C + \int \Big(-\frac{1}{2} \Big)\, e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} dx \right) e^{-\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} \\
&= \left(C - \frac{1}{2} \int e^{-\ln|x|} dx \right) e^{\ln|x|} \\
&= \left(C - \frac{1}{2} \int e^{\ln(1/|x|)} dx \right) e^{\ln|x|} \\
&= \left(C - \frac{1}{2} \int \frac{1}{|x|}\, dx \right) |x| \\
&= \Big(C - \frac{1}{2} \ln|x| \Big) |x| = \boldsymbol{C|x| - \frac{|x|}{2} \ln|x|}.
\end{aligned}
$$

Samim tim, na osnovu $y = y_p + \dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$, nalazimo opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine

$$
\boldsymbol{y = y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{C|x| - \frac{|x|}{2} \ln|x|}}.
$$

(ii) Polazeći od diferencijalnog oblika

$$
1\,dx + \big(x^2 - y^2 - 1 \big)\, dy = 0
$$

moguća su dva ekvivalentna eksplicitna oblika

$$
y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2 - y^2 - 1}
$$

i

$$
\begin{aligned}
x'_y &= \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{-1} \\
&= -x^2 + y^2 + 1
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad x'_y = \underbrace{\big(-1\big)}_{P(y)} x^2 + \underbrace{\big(0\big)}_{Q(y)} x + \underbrace{\big(y^2 + 1\big)}_{R(y)}.
$$

Drugi oblik diferencijalne jednačine jeste Rikatijeva diferencijalna jednačina po funkciji $\boldsymbol{x = x(y)}$ i pri tom se zna oblik partikularnog rešenja $x_p = By$ za $B \in \mathbb{R}$. Prvo određujemo konstantu B na osnovu

$$
\begin{aligned}
(x_p)'_y = -x_p^2 + y^2 + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad (By)'_y = -\,(By)^2 + y^2 + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad B = -B^2 y^2 + y^2 + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(B - 1\big)\big((B+1)y^2 + 1\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B = 1}.
\end{aligned}
$$

Samim tim partikularno re vsenje je funkcija

$$\boldsymbol{x_p = x_p(y) = By = y}.$$

Znajući jedno partikularno rešenje x_p posmatrana Rikatijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{x - x_p}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x = x_p + \frac{1}{z} = y + \frac{1}{z}}$$

svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu po funkciji $z = z(y)$. Zaista

$$\begin{aligned}
x'_y = -x^2 + y^2 + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(y + \frac{1}{z}\right)'_y = -\left(y + \frac{1}{z}\right)^2 + y^2 + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 + (z^{-1})' = -y^2 - 2y\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + y^2 + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{z'_y}{z^2} = -2y\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \;\Big/\cdot(-z^2) \\
&\Longleftrightarrow \quad z'_y = 2yz + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad z' + \underbrace{(-2y)}_{P_2(y)} z = \underbrace{(1)}_{Q_2(y)}.
\end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z = z(y)} &= \left(C + \int Q_2(y)\, e^{\int P_2(y)\,dy} dy\right) e^{-\int P_2(y)\,dy} \\
&= \left(C + \int (1)\; e^{\int(-2y)\,dy} dy\right) e^{-\int(-2y)\,dy} \\
&= \boldsymbol{\left(C + \int e^{-y^2} dy\right) e^{\,y^2}}.
\end{aligned}$$

Samim tim na osnovu $x = y + \dfrac{1}{z}$, nalazimo opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{x = x(y) = y + \frac{1}{\left(C + \int e^{-y^2} dy\right) e^{\,y^2}}}.$$

Napomenimo da integral $\displaystyle\int e^{-t^2} dt$ nije elementarna funkcija. □

(vii) **Lagranžova diferencijalna jednačina** je diferencijalna jednačina oblika:

$$y = \varphi(y')x + \psi(x),$$

za neprekidne funkcije $\varphi, \psi\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Neka je $\varphi(p) \neq p$. Tada posmatrana diferencijalna jenačina se svodi na linearnu pomoću funkcije:

$$x = x(p),$$

tj. smenom:

$$p = y' \quad \wedge \quad d_p y = p\, d_p x = p\, x'_p\, dp.$$

Zaista

$$d_p y = d_p(\varphi(p)x + \psi(p)) = \big(\varphi'_p(p)x + \varphi(p)x'_p + \psi'_p(p)\big)dp = p\, x'_p\, dp$$

$$\Longrightarrow \quad x'_p + \frac{\varphi'_p(p)}{\varphi(p) - p}x = -\frac{\psi'_p(p)}{\varphi(p) - p}$$

Ako je $\varphi(p) = p$ tada postoji singularno rešenje:

$$y = p \cdot x + \psi(p).$$

1.3 Diferencijalne jednačine n-tog reda

Diferencijalne jednačine n-tog reda se određuju u *implicitnom obliku*:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

za $F : D_{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$, za $D_{n+2} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Diferencijalne jednačine n-tog reda, za $n \geq 2$ nazivamo diferencijalnim jednačinama višeg reda.

Nadalje od diferencijalnih jednačina višeg rada razmatramo samo linearne diferencijalne jednačine u sledećoj sekciji.

1.4 Diferencijalne višeg reda - metode rešavanja

***(i)* Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda** je diferencijalna jednačina

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Ako su $a_1 = a_1(x), \ldots, a_n = a_n(x)$ konstante tada $(*)$ je *linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima*, u protivnom je sa funkcionalnim koeficijentima. Ako je $f(x) = 0$ diferencijalna jednačina $(*)$ je *homogena linearna diferencijalna jednačina*, a ako je $f(x) \neq 0$ diferencijalna jednačina $(*)$ je *nehomogena linearna diferencijalna jednačina*.

***(ii)* Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda** je diferencijalna jednačina:

$$(*)_H \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Rešenje diferencijalne jednačine $(*)_H$ dato u obliku nula funkcije

$$y = y(x) = 0$$

se naziva *trivijalno rešenje*. Funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ definisane nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ su *linearno zavisne* ako postoje realne konstante $c_1, \ldots, c_n$ takve da $c_1^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0$ i da važi $(\forall x \in D_1)\, c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$. U suprotnom su *linearno nezavisne*. Neka je dato n funkcija $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, tada determinanta

$$W(y_1, \ldots, y_n, x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se naziva *determinanta Vronskog*. Važi tvrđenje:

Teorema 1.18. *Neka su* $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *za neki interval* $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ *rešenja homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$. *Tada je ili*
$(\forall x \in D_1)\, W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ *i funkcije* $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *su linearno nezavisne*
ili
$(\forall x \in D_1)\, W(y_1, \ldots, y_n) = 0$ *i funkcije* $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *su linearno zavisne.*

Teorema 1.19. *Neka su* $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *za neki interval* $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ *rešenja homogene linearne jednačine* $L_n[y] = 0$ *i ako su funkcije* $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ *linearno nezavisne, tada je opšte rešenje date jednačine*

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

za $x \in D_1$ *i gde su* $c_1, \ldots, c_n$ *proizvoljne realne konstante.*

Neka su $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ koja su linearno nezavisna, tada $y_1, \ldots, y_n$ nazivamo *fundamentalni sistem rešenja.*

Teorema 1.20. (Liuvilova formula) *Ako je* $y_1 = y_1(x)$ *jedno netrivijalno rešenje linearne diferencijalne jednačine*

$$L_2[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

za neke funkcije $p, q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *za neki interval* $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, *tada funkcija:*

$$y_2 = y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$$

predstavlja drugo partikularno rešene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ *koje je linearno nezavisno od* $y_1 = y_1(x)$. *U tom slučaju opšte rešenje diferencijalne jednačine* $L_2[y] = 0$ *je dato sa*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

za ma koje realne konstante c_1, c_2.

Prethodno tvrđenje dokazujemo sa sledećim tvrđenjem.

Teorema 1.21. (1) *Neka je data homogena linearna diferencijalna jednačina*

$$L_2[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

za neke funkcije $p, q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *za neki interval* $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. *Ako je dato jedno netrivijalno rešenje linearne diferencijalne jednačine*

$$y_1 = y_1(x),$$

tada jedno drugo rešenje linearne diferencijalne jednačine je oblika

$$y_2 = y_1 \int u\,dx,$$

za funkciju

$$u = \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}.$$

(2) *Rešenja*

$$y_1 = y_1(x) \quad i \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$$

su linearno nezavisna.

Dokaz. **(1)** Ako tražimo jedno drugo rešenje u obliku $y_2 = y_1 \int u\,dx$, tada:

$$\begin{aligned}
& y_2 = y_1 \int u\,dx \\
\Longrightarrow\quad & y_2' = y_1' \int u\,dx + y_1 u \\
\Longrightarrow\quad & y_2'' = y_1'' \int u\,dx + 2y_1' u + y_1 u'.
\end{aligned}$$

Samim tim

$$\begin{aligned}
& y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & y_1'' \int u\,dx + 2y_1' u + y_1 u' + p(x)\left(y_1' \int u\,dx + y_1 u \right) + q(x)\left(y_1 \int u\,dx \right) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \underbrace{(y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1)}_{(=0)} \int u\,dx + 2y_1' u + y_1 u' + p(x) y_1 u = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & 2y_1' u + p(x) y_1 u = -y_1 u' \quad /^{:u} \\
\Longleftrightarrow\quad & 2y_1' + p(x) y_1 = -y_1 \frac{u'}{u} \quad /^{:y_1} \\
\Longleftrightarrow\quad & 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) = -\frac{u'}{u}.
\end{aligned}$$

Integracijom

$$\frac{u'}{u} = -2\frac{y_1'}{y_1} - p(x) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}.$$

2. Na osnovu činjenice da formula

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx,$$

ne daje linearnu zavisnost $y_2 = y_1 r$ za neki realan broj $r \in \mathbb{R}$, odatle sleduje navedeni zaključak. ■

Zadatak 8. *Rešiti diferencijalne jednačine:*

(i)

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

znajući da je jedno partikularno rešenje $y_1 = y_1(x) = e^x$;

(ii)

$$xy'' + 2y' - xy = 0,$$

tražeći partikularno rešenje u obliku $y_1 = y_1(x) = x^a e^x$ *za* $a \in \mathbb{R}$.

Rešenje. (i) Budući da se zna jedno netrivijalno rešenje $y_1 = y_1(x) = e^x$ diferencijalne jednačine

$$y'' \underbrace{-6}_{p(x)} y' + \underbrace{5}_{q(x)} y = 0$$

drugo linearno nezavisno rešenje $y_2 = y_2(x)$ je određeno Liuvilovom formulom

$$\boldsymbol{y_2 = y_2(x)} = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx = e^x \int \frac{e^{-\int (-6)\,dx}}{(e^x)^2}\,dx = e^x \int \frac{e^{6x}}{e^{2x}}\,dx = e^x \int e^{4x}\,dx = e^x\,\frac{e^{4x}}{4} = \boldsymbol{\frac{e^{5x}}{4}}.$$

Na osnovu prethodnog, opšte rešenje je dato sa

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 \frac{1}{4} e^{5x}},$$

za neke realne konstante c_1 i c_2. Napomenimo da funkcije $y_1 = e^x, y_2 = e^{5x}$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane diferencijalne jednačine.

(ii) Odredimo vrednost $a \in \mathbb{R}$ tako da je $y_1 = y_1(x) = x^a e^x$ rešenje. Važi

$$\begin{aligned}
& x y_1'' + 2y_1' - x y_1 = 0 \\
\iff\ & x\big(x^a e^x\big)'' + 2\big(x^a e^x\big)' - x\big(x^a e^x\big) = 0 \\
\iff\ & x\big(a x^{a-1} e^x + x^a e^x\big)' + 2\big(a x^{a-1} e^x + x^a e^x\big) - x\big(x^a e^x\big) = 0 \\
\iff\ & x\big(a(a-1)x^{a-2} e^x + 2a x^{a-1} e^x + x^a e^x\big) + 2\big(a x^{a-1} e^x + x^a e^x\big) - x\big(x^a e^x\big) = 0 \\
\iff\ & x\big(a(a-1)x^{a-2} + 2a x^{a-1} + x^a\big) + 2\big(a x^{a-1} + x^a\big) - x\big(x^a\big) = 0 \\
\iff\ & \big(a(a-1)x^{a-1} + 2a x^a + x^{a+1}\big) + 2\big(a x^{a-1} + x^a\big) - \big(x^{a+1}\big) = 0 \\
\iff\ & a(a-1)x^{a-1} + 2a x^a + 2a x^{a-1} + 2x^a = 0 \\
\iff\ & \big(a(a-1) + 2a\big)x^{a-1} + \big(2a + 2\big)x^a = 0 \\
\iff\ & \big(a^2 + a\big)x^{a-1} + 2\big(a+1\big)x^a = 0 \\
\iff\ & \big(a+1\big)\big(a\,x^{a-1} + 2\,x^a\big) = 0 \\
\implies\ & \boldsymbol{a = -1}.
\end{aligned}$$

Samim tim jedno netrivijalno partikularno rešenje je

$$\boldsymbol{y_1 = y_1(x) = x^a e^x = \frac{e^x}{x}},$$

pri čemu $x \neq 0$. Polazeći od diferencijalne jednačine

$$x y'' + 2y' - xy = 0$$

zapisane u normiranom obliku

$$y'' + \underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{p(x)} y' + \underbrace{(-1)}_{q(x)} y = 0,$$

drugo linearno nezavisno rešenje $y_2 = y_2(x)$ je određeno Liuvilovom formulom

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_2 = y_2(x)} &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx = \frac{e^x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}}{\left(\frac{e^x}{x}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{e^x}{x} \int \frac{e^{-2\ln|x|}}{\frac{e^{2x}}{x^2}}\,dx = \frac{e^x}{x} \int \frac{\frac{1}{|x|^2}}{\frac{e^{2x}}{x^2}}\,dx = \frac{e^x}{x} \int e^{-2x}\,dx = \frac{e^x}{x}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) = \boldsymbol{-\frac{e^{-x}}{2x}}.
\end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog, opšte rešenje je dato sa

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \frac{e^x}{x} - c_2 \frac{e^{-x}}{2x}},$$

za neke realne konstante c_1 i c_2. Funkcije $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$, $y_2 = \dfrac{e^{-x}}{2x}$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane diferencijalne jednačine. □

***(iii)* Nehomogena linearna diferencijalna jednačina $\boldsymbol{n}$-tog reda** je diferencijalna jednačina

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ i $f(x) \neq 0$. Važi opšte tvrđenje:

Teorema 1.22. *Neka je data nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda*

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x),$$

i odgovarajuća homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

$$(*)_H \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ i $f(x) \neq 0$. Ako je $y_p = y_p(x)$ partikularno rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine $(*)$ i ako je $y_h = y_h(x)$ opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine $(*)_H$, tada opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$ je dato sa

$$y = y(x) = y_p(x) + y_h(x),$$

za $x \in D_1$.

Teorema 1.23. *Neka je data nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda*

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f_1, \ldots, f_k : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x) \neq 0$. Ako je $y_{p_1} = y_{p_1}(x)$ partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine $L_n[y_1] = f_1(x), \ldots, y_{p_k} = y_{p_k}(x)$ partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine $L_n[y_k] = f_k(x)$ respektivmo, tada je

$$y_p = y_{p_1} + \ldots + y_{p_k}$$

partikularno rešenje polazne linearne diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$, za $x \in D_1$.

***(iv)* Metoda varijacije konstanti za nalaženja partikularnog rešenja $\boldsymbol{L_n[y] = f(x)}$**

Teorema 1.24. *Neka je*

$$y_h = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine $L_n[y] = 0$. Tada opšte rešenje nehomogene linearne diferecijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje je dato sa

$$y = y(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x),$$

gde su $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ *funkcije takve da važi*

$$(**)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccc} C_1'(x)\,y_1(x) & + & C_2'(x)\,y_2(x) & + & \ldots & + & C_n'(x)\,y_n(x) & = & 0, \\ C_1'(x)\,y_1'(x) & + & C_2'(x)\,y_2'(x) & + & \ldots & + & C_n'(x)\,y_n'(x) & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & + & \ldots & + & C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & + & \ldots & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = & f(x). \end{array}\right\}$$

Napomena 1.25. *Sistem* $(**)$ *nazivamo sistemom varijacije konstanti i on se rešava kao linearan sistem po nepoznatim funkcijama* $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$. *Odatle*

$$\begin{aligned} C_1(x) &= C_1^* + \int C_1'(x)\,dx, \\ &\vdots \\ C_n(x) &= C_n^* + \int C_n'(x)\,dx; \end{aligned}$$

za realne konstante $C_1^*, \ldots, C_n^*$.

Zadatak 9. ***(i)*** *Rešiti nehomogenu diferencijalnu jednačinu*

$$(*)\qquad y'' + y = \frac{1}{\cos x},$$

ukoliko se zna da je $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, *za neke realne konstante* c_1, c_2, *opšte rešenje homogene diferencijlne jednačine*

$$(*)_H\qquad y'' + y = 0.$$

(ii) *Rešiti nehomogenu diferencijalnu jednačinu*

$$(*)\qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1},$$

ukoliko se zna da je $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$, *za neke realne konstante* c_1, c_2, c_3, *opšte rešenje homogene diferencijlne jednačine*

$$(*)_H\qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Rešenje. ***(i)*** Opšte rešenje nehomogene linearne diferencjalne jednačine $(*)$ tražimo u obliku

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x,$$

gde funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ se određuju iz linearnog sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)' = \dfrac{1}{\cos x}; \end{array}\right\}$$

odnosno sistema

$$\left\{\begin{array}{c} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{array}\right\}$$

Rešimo prvo sistem po $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$ upotrebom Kramerovih formula. Izračunajmo determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1/\cos x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \quad \Delta_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1/\cos x \end{vmatrix} = 1;$$

na osnovu kojih dobijamo

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'(x)}}{\Delta} = -\operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C_1^*,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'(x)}}{\Delta} = 1 \quad \Longrightarrow \quad C_2(x) = \int 1\, dx = x + C_2^*;$$

za neke realne konstante C_1^* i C_2^*. Za prethodno određene funkcije

$$C_1(x) = -\ln|\cos x| + C_1^* \quad \text{i} \quad C_2(x) = x + C_2^*$$

nalazimo opšte rešenje nehomogene linerne diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{y = C_1(x)\cdot\cos x + C_2(x)\cdot\sin x = -\ln|\cos x|\cdot\cos x + x\cdot\sin x + C_1^*\cos x + C_2^*\sin x},$$

za $x \in D_1$, gde je $D_1 \subset \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z\right\}$ neki interval.

Primetimo da je ovim postupkom jedno partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine dato sa

$$\boldsymbol{y_p = -\ln|\cos x|\cdot\cos x + x\cdot\sin x},$$

za $x \in D_1$, gde je $D_1 \subset \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z\right\}$ neki interval.

(ii) Opšte rešenje nehomogene linearne diferencjalne jednačine $(*)$ tražimo u obliku

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} + C_3(x)e^{3x}$$

gde funkcije $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ se određuju iz linearnog sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} + C_3'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)\,(e^x)' + C_2'(x)\,(e^{2x})' + C_3'(x)\,(e^{3x})' = 0, \\ C_1'(x)\,(e^x)'' + C_2'(x)\,(e^{2x})'' + C_3'(x)\,(e^{3x})'' = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}; \end{array}\right\}$$

odnosno sistema

$$\left\{\begin{array}{c} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} + C_3'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} + 3C_3'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 4C_2'(x)e^{2x} + 9C_3'(x)e^{3x} = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}. \end{array}\right\}$$

Rešimo prvo sistem po $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ i $C_3'(x)$ upotrebom Kramerovih formula.

Izračunajmo redom determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix} \cdot e^{6x} = 2\,e^{6x} \neq 0,$$

$$\Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \cdot e^{5x} = \frac{e^{9x}}{e^{2x}+1} \neq 0,$$

$$\Delta_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \cdot 2e^{4x} = -\frac{2e^{8x}}{e^{2x}+1} \neq 0,$$

$$\Delta_{C_3'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \cdot (-e^{3x}) = -\frac{e^{7x}}{e^{2x}+1} \neq 0;$$

na osnovu kojih dobijamo

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'(x)}}{\Delta} = \frac{1}{2}\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} \quad \Longrightarrow \quad C_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x - \operatorname{arctg} e^x\right) + C_1^*,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'(x)}}{\Delta} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \quad \Longrightarrow \quad C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C_2^*,$$

$$C_3'(x) = \frac{\Delta_{C_3'(x)}}{\Delta} = -\frac{1}{2}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1} \quad \Longrightarrow \quad C_3(x) = -\int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + C_3^*;$$

za neke realne konstante C_1^*, C_2^* i C_3^*. Za prethodno određene funkcije

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \operatorname{arctg} e^x\right) + C_1^*, \;\; C_2(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C_2^* \;\text{ i }\; C_3(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + C_3^*$$

nalazimo opšte rešenje nehomogene linerne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C_1(x)\cdot e^x + C_2(x)\cdot e^{2x} + C_3(x)\cdot e^{3x}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\Big(e^{2x} + (e^{3x} - e^x)\,\operatorname{arctg} e^x - e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)\Big) + C_1^* e^x + C_2^* e^{2x} + C_3^* e^{3x}}\,, \end{aligned}$$

za $x \in D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde je D_1 neki interval.

Primetimo da je ovim postupkom jedno partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine dato sa

$$\boldsymbol{y_p = \frac{1}{2}\Big(e^{2x} + (e^{3x} - e^x)\,\operatorname{arctg} e^x - e^{2x}\ln\left(1+e^{2x}\right)\Big)},$$

za $x \in D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde je D_1 neki interval. □

(*v*) Homogena linearna diferencijalna jednačina *n*-tog reda sa konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednačina:

$$(*)_H \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ konstante.

Važe tvrđenja iz sekcije (*ii*) ovog dela.

Teorema 1.26. *Za karakterističnu jednačinu sa realnim koeficijentima:*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

neka je određeno n korena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in C$ navodeći ih spiskom gde se koreni navode onoliko puta kolika im je višestrukost

$$(\nu) \qquad \lambda_1, \ldots, \underbrace{\lambda_j, \ldots, \lambda_j}_{(k)}, \ldots, \lambda_n.$$

Neka je npr. λ_j višestrukosti k u realnom/kompleksnom slučaju). Korenu λ_j odgovaraju partikularna rešenja određena po sledećim pravilima:*

1. *Svakom realnom korenu λ_j reda k odgovara sledećih k partikularnih rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$:*

$$(1) \qquad y_j^{(0)}(x) = e^{\lambda_j x},\ y_j^{(1)}(x) = xe^{\lambda_j x},\ \ldots\ ,\ y_j^{(k-1)}(x) = x^{k-1}e^{\lambda_j x}.$$

2. *Svakom kompleksnom korenu $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j \boldsymbol{i}$ reda k odgovara sledećih $2k$ partikularnih rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$:*

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_j^{(0)}(x) = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\ y_j^{(2)}(x) = xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\ \ldots\ ,\ y_j^{(2k-2)}(x) = x^{k-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \\ \\ y_j^{(1)}(x) = e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,\ y_j^{(3)}(x) = xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x\,,\ \ldots\ ,\ y_j^{(2k-1)}(x) = x^{k-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x. \end{array} \right\}$$

Ovako određena partikularna rešenja $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ su linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$ i opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$ je dato sa linarnom kombinacijom

$$y_h = y_h(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

gde su $c_1, \ldots, c_n$ proizvoljne realne konstante.

(*vi*) Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednačina:

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ konstante i $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ i $f(x) \neq 0$.

Važe tvrđenja iz sekcije (*iii*) ovog dela. Postupci rešavnja se baziraju na prethodnoj teoremi koja omogućava da se za homogenu linearu diferencijalnu jednačinu $L_n[y] = 0$ nađe opšte rešenje:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

gde su $c_1, \ldots, c_n$ realne konstante. Posle toga se mogu koristiti sledeća dva postupka za određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$:

1. Metoda varijacije konstanti. Svodi se na primenu prethodno iskazane Teoreme 1.24.

2. Metoda neodređenih koeficijenata. Ovaj postupak se primenjuje kada je funkcija $f(x)$ u jednom od sledeća dva oblika:

---

*) ako se u listi (ν) nalazi k puta koren $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j \boldsymbol{i}$, tada se u toj listi nalazi k puta kojugovani koren $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - \beta_j \boldsymbol{i}$, tj.

$$(\nu) \qquad \lambda_1, \ldots, \underbrace{\lambda_j, \ldots, \lambda_j}_{(k)}, \underbrace{\overline{\lambda_j}, \ldots, \overline{\lambda_j}}_{(k)}, \ldots, \lambda_n.$$

1) $\boldsymbol{f(x) = e^{ax} P_m(x)}$ za $a \in \mathbb{R}$ i neki polinom $P_m(x)$ stepena m. Tada tražimo partikularno rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine:

$$L_n[y] = f(x)$$

u sledećem obliku:

$$y_p = x^s e^{ax} Q_m(x),$$

gde je $s \in \mathbb{N}_0$ višestrukost korena a u karakterističnoj jednačini odgovarajuće homogene jednačine i gde neodređeni koeficijenti polinoma $Q_m(x)$ postaju određeni zamenom očekivanog oblika $y = y_p$ u $L_n[y] = f(x)$.

2) $\boldsymbol{f(x) = e^{ax}\big(P_{m_1}(x) \cos bx + P_{m_2}(x) \sin bx\big)}$ za $a, b \in \mathbb{R}$ i neke polinome $P_{m_1}(x)$ i $P_{m_2}(x)$ stepena m_1 i m_2 respektivno. Tada tražimo partikularno rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L_n[y] = f(x)$$

u sledećem obliku

$$y_p = x^s e^{ax}\big(Q_m(x) \cos bx + R_m(x) \sin bx\big), \quad (m = \max\{m_1, m_2\})$$

gde je $s \in \mathbb{N}_0$ višestrukost korena $z = a + bi$ u karakterističnoj jednačini odgovarajuće homogene jednačine i gde neodređeni koeficijenti polinoma $Q_m(x)$ i $R_m(x)$ postaju određeni zamenom očekivanog oblika $y = y_p$ u $L_n[y] = f(x)$.

Zadatak 10. *Rešiti nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima*:

(i)

$$L_3[y] = y''' - y'' + y' - y = x^2 + x,$$

(ii)

$$L_3[y] = y''' - y'' = xe^x,$$

(iii)

$$L_2[y] = y'' - y' = e^x + e^{2x} + x,$$

(iv)

$$L_2[y] = y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)\, e^{-2x},$$

(v)

$$L_2[y] = y'' + y = \sin 2x.$$

Rešenje. ***(i)*** Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_3[y] = y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

i karakterističnim korenima $\lambda_{2,3} = \pm\, i$ odgovaraju dva partikularna rešenja

$$y_2 = \cos x$$

i
$$y_3 = \sin x.$$
Funkcije $y_1 = e^x, y_2 = \cos x, y_3 = \sin x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_3[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom
$$\boldsymbol{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x},$$
za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine
$$L_3[y] = y''' - y'' + y' - y = f(x) = x^2 + x = e^{\boldsymbol{0}\,x}\big(x^2 + x\big) = e^{\boldsymbol{a}\,x} P_2(x) \quad (m = 2)$$
formiramo broj
$$\boldsymbol{z = a = 0}$$
koji nije koren karakteristične jednačine $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ i ima višestrukost
$$\boldsymbol{s = 0}.$$
Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku
$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{\big(a_1 x^2 + b_1 x + c_1\big)}_{Q_2(x)} = a_1 x^2 + b_1 x + c_1,$$
sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_3[y] = f(x) = x^2 + x$ odakle zaključujemo:
$$\begin{aligned}
L_3[y_p] &= y_p''' - y_p'' + y_p' - y_p \\
&= (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)''' - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)'' + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)' - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \\
&= 0 - 2a_1 + (2a_1 x + b_1) - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \\
&= -a_1 x^2 + (2a_1 - b_1)\,x + (-2a_1 + b_1 - c_1) \\
&= f(x) = x^2 + x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -1 \ \wedge \ b_1 = -3 \ \wedge \ c_1 = -1.
\end{aligned}$$
Samim tim
$$\boldsymbol{y_p = -x^2 - 3x - 1}.$$
Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:
$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = (-x^2 - 3x - 1) + c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x},$$
za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

(ii) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu
$$L_3[y] = y''' - y'' = 0.$$
Na osnovu karakteristične jednačine
$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = (\lambda - 1)\lambda^2 = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

i karakterističnom korenu $\lambda_{2,3} = 0$ odgovaraju dva partikularna rešenja

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = 1$$

i

$$y_3 = xe^{\lambda_2 x} = x.$$

Funkcije $y_1 = e^x, y_2 = 1, y_3 = x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_3[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^x + c_2 + c_3 x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L_3[y] = y''' - y'' = f(x) = x\,e^x = e^{\mathbf{1}\,x} x = e^{\boldsymbol{a}\,x} P_1(x) \quad (m{=}1)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 1}$$

koji jeste koren karakteristične jednačine $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ i ima višestrukost

$$\boldsymbol{s = 1}.$$

Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku

$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{(a_1 x + b_1)}_{Q_1(x)} = x\,e^x\,(a_1 x + b_1) = (a_1 x^2 + b_1 x)e^x,$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_3[y] = f(x) = xe^x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned}
L_3[y_p] &= y_p''' - y_p'' = ((a_1x^2 + b_1x)e^x)''' - ((a_1x^2 + b_1x)e^x)'' \\
&= (a_1x^2e^x + b_1xe^x)''' - (a_1x^2e^x + b_1xe^x)'' \\
&= (a_1 2xe^x + a_1x^2e^x + b_1e^x + b_1xe^x)'' - (a_1 2xe^x + a_1x^2e^x + b_1e^x + b_1xe^x)' \\
&= (a_1x^2e^x + (2a_1 + b_1)xe^x + +b_1e^x)'' - (a_1x^2e^x + (2a_1 + b_1)xe^x + +b_1e^x)' \\
&= (a_1 2xe^x + a_1x^2e^x + (2a_1 + b_1)e^x + (2a_1 + b_1)xe^x + b_1e^x)' \\
&- (a_1 2xe^x + a_1x^2e^x + (2a_1 + b_1)e^x + (2a_1 + b_1)xe^x + b_1e^x) \\
&= (a_1x^2e^x + (4a_1 + b_1)xe^x + (2a_1 + 2b_1)e^x)' \\
&- (a_1x^2e^x + (4a_1 + b_1)xe^x + (2a_1 + 2b_1)e^x) \\
&= (a_1 2xe^x + a_1x^2e^x + (4a_1 + b_1)e^x + (4a_1 + b_1)xe^x + (2a_1 + 2b_1)e^x) \\
&- (a_1x^2e^x + (4a_1 + b_1)xe^x + (2a_1 + 2b_1)e^x) \\
&= (a_1x^2e^x + (6a_1 + b_1)xe^x + (6a_1 + 3b_1)e^x) - (a_1x^2e^x + (4a_1 + b_1)xe^x + (2a_1 + 2b_1)e^x) \\
&= \Big((2a_1)xe^x + (4a_1 + b_1)e^x\Big) \\
&= f(x) = xe^x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = \frac{1}{2} \,\wedge\, b_1 = -2.
\end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_p = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) x\, e^{x}}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) x\, e^{x} + c_1\, e^{x} + c_2 + c_3\, x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

(iii) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y] = y'' - y' = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 0$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1$$

i karakterističnom korenu $\lambda_2 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{x}.$$

Funkcije $y_1 = 1, y_2 = e^x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Samim tim *homogeno rešenje*, tj. opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 + c_2 e^{x}},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. Dalje koristimo Teoremu 1.23. Posmatrajmo tri linearne diferencijalne jednačine

$$L_2[y_1] = y_1'' - y_1' = f_1(x) = e^{x},$$

$$L_2[y_2] = y_2'' - y_2' = f_2(x) = e^{2x},$$

$$L_2[y_3] = y_3'' - y_3' = f_3(x) = x.$$

1. Za linearnu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y_1] = y_1'' - y_1' = f_1(x) = e^{x} = e^{\boldsymbol{1}\, x} = e^{\boldsymbol{a}\, x} P_0(x)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 1}$$

koji je višestrukosti $\boldsymbol{s = 1}$ za karakterističnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda = 0$. Samim tim

$$y_{p_1} = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\, x} \underbrace{(a_1)}_{Q_0(x)} = a_1\, x\, e^{x},$$

sa neodređenim realnim koeficijentom $a_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijent određujemo zamenom $y_1 = y_{p_1}$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y_1] = f_1(x) = e^x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned} L_2[y_{p_1}] &= y''_{p_1} - y'_{p_1} \\ &= (a_1 x e^x)'' - (a_1 x e^x)' \\ &= (a_1 e^x + a_1 x e^x)' - (a_1 e^x + a_1 x e^x) \\ &= a_1 e^x + a_1 e^x + a_1 x e^x - a_1 e^x - a_1 x e^x \\ &= a_1 e^x \\ &= f_1(x) = e^x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 1. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_{p_1} = x\, e^x}.$$

2. Za linearnu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y_1] = y''_1 - y'_1 = f_2(x) = e^{2x} = e^{\mathbf{2}\,x} = e^{\boldsymbol{a}\,x} P_0(x)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 2}$$

koji je višestrukosti $\boldsymbol{s = 0}$ za karakterističnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda = 0$. Samim tim

$$y_{p_2} = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{(a_1)}_{Q_0(x)} = a_1\, e^{2x},$$

sa neodređenim realnim koeficijentom $a_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijent određujemo zamenom $y_2 = y_{p_2}$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y_2] = f_2(x) = e^{2x}$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned} L_2[y_{p_2}] &= y''_{p_2} - y'_{p_2} \\ &= (a_1 e^{2x})'' - (a_1 e^{2x})' \\ &= 4a_1 e^{2x} - 2a_1 e^{2x} \\ &= 2a_1 e^{2x} \\ &= f_2(x) = e^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 1/2. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_{p_2} = \frac{1}{2} e^{2x}}.$$

3. Za linearnu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y_3] = y''_3 - y'_3 = f_3(x) = x = e^{\mathbf{0}\,x} x = e^{\boldsymbol{a}\,x} P_1(x)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 0}$$

koji je višestrukosti $\boldsymbol{s = 1}$ za karakterističnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda = 0$. Samim tim

$$y_{p_3} = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{(a_1 x + b_1)}_{Q_1(x)} = a_1 x^2 + b_1 x,$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y_3 = y_{p_3}$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y_3] = f_3(x) = x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned} L_2[y_{p_3}] &= y''_{p_3} - y'_{p_3} \\ &= (a_1x^2 + b_1x)'' - (a_1x^2 + b_1x)' \\ &= 2a_1 - 2a_1x - b_1 \\ &= (-2a_1)x + (2a_1 - b_1) \\ &= f_3(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -\frac{1}{2} \ \wedge \ b_1 = -1. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_{p_3} = -\frac{1}{2}x^2 - x}.$$

Sveukupno, *partikularno rešenje* polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}},$$

a *opšte rešenje* polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_h = \left(xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)\right) + c_1 + c_2e^x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$.

(iv) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y] = y'' + y' - 2y = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2) = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

i karakterističnom korenu $\lambda_2 = -2$ odgovara partikularno rešenje

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}.$$

Funkcije $y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x}$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2e^{-2x}},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L_2[y] = y'' + y' - 2y = f(x) = \left(x^2 - 1\right)e^{-2x} = e^{\boldsymbol{-2}\,x}\left(x^2 - 1\right) = e^{\boldsymbol{a}\,x}P_2(x) \quad (m=2)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = -2}$$

koji jeste koren karakteristične jednačine $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ i ima višestrukost

$$\boldsymbol{s = 1}.$$

Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku

$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)}_{Q_2(x)} = x\,e^{-2x}\left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right) = (a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x)e^{-2x},$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y] = f(x) = (x^2 - 1)\,e^{-2x}$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned}
L_2[y_p] &= y_p'' + y_p' - 2y_p \\
&= \big((a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big)'' + \big((a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big)' - 2\big((a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big) \\
&= \big((3a_1x^2{+}2b_1x{+}c_1)e^{-2x} - 2(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big)' \\
&\quad+\big((3a_1x^2{+}2b_1x{+}c_1)e^{-2x} - 2(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big) - 2\big(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x\big)e^{-2x} \\
&= \big((-2a_1x^3 + (3a_1{-}2b_1)x^2 + (2b_1{-}2c_1)x + c_1)e^{-2x}\big)' \\
&\quad+\big(-2a_1x^3 + (3a_1{-}2b_1)x^2 + (2b_1{-}2c_1)x + c_1\big)e^{-2x} - 2\big(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x\big)e^{-2x} \\
&= \big(4a_1x^3 + (-12a_1{+}4b_1)x^2 + (6a_1{-}8b_1{+}4c_1)x + (2b_1 - 4c_1)\big)e^{-2x} \\
&\quad+\big(-2a_1x^3 + (3a_1{-}2b_1)x^2 + (2b_1{-}2c_1)x + c_1\big)e^{-2x} + \big(-2a_1x^3{-}2b_1x^2{-}2c_1x\big)e^{-2x} \\
&= \big(-9a_1x^2 + (6a_1{-}6b_1)x + (2b_1{-}3c_1)\big)e^{-2x} \\
&= f(x) = (x^2-1)\,e^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -\frac{1}{9} \,\wedge\, b_1 = -\frac{1}{9} \,\wedge\, c = \frac{7}{27}.
\end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_p = \left(-\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{7}{27}\right)e^{-2x}}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = \left(-\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{7}{27}\right)e^{-2x} + c_1e^{x} + c_2e^{-2x}},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

(v) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y] = y'' + y = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_{1,2} = \pm\, i$ odgovaraju partikularna rešenja

$$y_1 = \cos x \quad \text{i} \quad y_2 = \sin x.$$

Funkcije $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\cos x + c_2\sin x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} L_2[y] = y'' + y \ &= \ f(x) = \sin 2x \\ &= \ e^{\mathbf{0}}\Big(0\cos \mathbf{2}x + 1\sin \mathbf{2}x\Big) = e^{\boldsymbol{a}}\Big(P_0^{(1)}(x)\cos \boldsymbol{b}x + P_0^{(2)}(x)\sin \boldsymbol{b}x\Big) \qquad (m_1 = m_2 = 0) \end{aligned}$$

formiramo kompleksan broj

$$\boldsymbol{z = a + b\,i = 2\,i}$$

koji nije koren karakteristične jednačine $\lambda^2 + \lambda = 0$ i ima višestrukost

$$\boldsymbol{s = 0}.$$

Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku

$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x}\big(Q_0(x)\cos \boldsymbol{b}x + R_0(x)\sin \boldsymbol{b}x\big) = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x,$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y] = f(x) = \sin 2x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned} L_2[y_p] = y_p'' + y_p \ &= \ \big(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x\big)'' + \big(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x\big) \\ &= \ \big(-4\alpha\cos 2x - 4\beta\sin 2x\big) + \big(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x\big) \\ &= \ -3\alpha\cos 2x - 3\beta\sin 2x \\ &= \ f(x) = \sin 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 0 \ \wedge \ \beta = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_p = -\frac{1}{3}\sin 2x}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = \left(-\frac{1}{3}\sin 2x\right) + c_1\cos x + c_2\sin x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. □

Zadatak 11. *U zavisnosti od realnog parametra $\kappa \in \mathbb{R}$ naći opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine*

$$L_2[y] = y'' + y - 2y = e^{\kappa\,x}.$$

Rešenje. Važi:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,x\,e^{x} + c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-2x} & : \quad \kappa = 1, \\ -\dfrac{1}{3}\,x\,e^{x} + c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-2x} & : \quad \kappa = -2, \\ \dfrac{1}{\kappa^2 + \kappa - 2}\,e^{\kappa x} + c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-2x} & : \quad \kappa \in \mathbb{R}\backslash\{1, -2\}; \end{cases}$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. □

Literatura: `https://dif.etf.bg.ac.rs/`

Beograd, 18.12.2022.

Prof. dr Branko J. Malešević
Elektrotehnički fakultet, Beograd
`http://home.etf.rs/~malesevic/`