3 SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

3.1 Sistemi linearnih diferencijalnih jednačina - opšta teorija

Definisanje

Sistem linearnih diferencijalnih jednačina u normalnom obliku je sistem:

(1)
$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' & = & a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1m}(x)y_m + b_1(x), \\ y_2' & = & a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{2m}(x)y_m + b_2(x), \\ & \vdots & \\ y_m' & = & a_{m1}(x)y_1 + \ldots + a_{mm}(x)y_m + b_m(x); \end{array}\right.$$

za zadate funkcije $a_{ij} = a_{ij}(x), b_i = b_i(x) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ $(i, j \in \{1, 2, \ldots, m\})$. Funkcije $a_{ij} = a_{ij}(x) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ $(i, j \in \{1, 2, \ldots, m\})$ se nazivaju *koeficjenti sistema*, a funkcije $b_i = b_i(x) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ $(i \in \{1, 2, \ldots, m\})$ se nazivaju *slobodni članovi*. Ukoliko su svi koeficijenti sistema konstante:

$$a_{ij} = a_{ij}(x) - Const.$$

tada je sistem (1) *sistem sa konstantnim koeficijentima*, inače sistem (1) je *sistem sa nekonstantnim koeficijentima*. Ukoliko su svi slobodni članovi nula funkcije:

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_m \equiv 0$$

sistem (1) je *homogen*, inače sistem (1) je *nehomogen*. Primetimo da prema prethodnom određenju sistemi linearnih jednačina su kvadratne prirode m jednačina po m nepoznatih funkcija.

Matrični zapis sistema

Uvedimo oznake:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \vec{y}\,' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1m}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \ldots & a_{mm}(x) \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_m(x) \end{bmatrix}.$$

Matrični zapis sistema (1) je dat sa:

[1]
$$\vec{y}\,' = \mathrm{A}\vec{y} + \vec{b}.$$

Specijalno *matrični zapis homogenog sistema* je dat sa:

$[1]_H$
$$\vec{y}\,' = \mathrm{A}\vec{y},$$

pri čemu se podrazumeva $\vec{b} = \vec{0} = [\,0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0\,]^T$.

Homogeni sistemi

Teorema 3.1. *Ako su* $\vec{y}_1$ *i* $\vec{y}_2$ *rešenja homogenog sistema* $[1]_H$ *i* $\lambda_1, \lambda_2 \in R$*, tada je i linearna kombinacija*

$$\vec{y} = \lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2$$

takođe rešenje homogenog sistema $[1]_H$.

Posmatrajmo m vektora:

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix}, \ \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{m2} \end{bmatrix}, \ \dots\ , \ \vec{y}_m = \begin{bmatrix} y_{1m} \\ y_{2m} \\ \vdots \\ y_{mm} \end{bmatrix};$$

za funkcije $y_{ij} = y_{ij}(x) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ $(i, j \in \{1, 2, \dots, m\})$. Ukoliko važi:

$$(\forall \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R)\, (\forall x \in [\alpha, \beta]) \Big(\lambda_1 \vec{y}_1 + \dots + \lambda_m \vec{y}_m = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \Big),$$

tada je su *vektori funkcija* $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ *linearno nezavisni*; u suprotnom ako važi:

$$(\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R)\, (\exists x \in [\alpha, \beta]) \Big(\lambda_1 \vec{y}_1 + \dots + \lambda_m \vec{y}_m = \vec{0} \ \wedge\ \neg(\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0) \Big),$$

tada je su *vektori funkcija* $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ *linearno zavisni*. Važi:

$$\lambda_1 \vec{y}_1 + \dots + \lambda_m \vec{y}_m = \vec{0} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 y_{11} + \lambda_2 y_{12} + \dots + \lambda_m y_{1m} & = & 0, \\ \lambda_2 y_{21} + \lambda_2 y_{22} + \dots + \lambda_m y_{2m} & = & 0, \\ & \vdots & \\ \lambda_1 y_{m1} + \lambda_2 y_{m2} + \dots + \lambda_m y_{mm} & = & 0 \end{array} \right\} \qquad (\mathcal{S}_0)$$

za $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$ i $x \in [\alpha, \beta]$. Sistem $(\mathcal{S}_0)$ je homogeni sistem i on ima netrivijalno rešenje po $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in R$ ukoliko je determinanta sistema:

$$W = W(x, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm} \end{vmatrix} = 0$$

u bar jednoj tački $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Prethodnu determinantu nazivamo *determinatom Vronskog*. Na osnovu prethodnog razmatranja sleduje tvrđenje.

Teorema 3.2. *Neka su* $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ *rešenja homogenog sistema* $[1]_H$. *Ukoliko važi*:

$$(\exists x_0 \in [\alpha, \beta])\, W(x_0, \vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m) = 0,$$

tada su rešenja $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ *linearno zavisna.*

Teorema 3.3. *Neka su* $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m$ *rešenja homogenog sistema* $[1]_H$ *koja su linearno nezavisna. Tada linearna kombinacija*:

$$\vec{y} = C_1 \vec{y}_1 + \dots + C_m \vec{y}_m,$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, \dots, C_m$*, određuje opšte rešenje homogenog sistema* $[1]_H$.

Dokaz. Neka je vektor $\vec{y} = C_1\vec{y}_1 + \ldots + C_m\vec{y}_m$ rešenje $[1]_H$. Tada niz funkcija koordinata

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_m) = C_1y_{11} + C_2y_{12} + \ldots + C_my_{1m}, \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, \ldots, C_m) = C_1y_{21} + C_2y_{22} + \ldots + C_my_{2m}, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m = \varphi_m(x, C_1, \ldots, C_m) = C_1y_{m1} + C_2y_{m2} + \ldots + C_my_{mm} \end{cases}$$

ispunjavaju sistem. Sa druge strane na osnovu linearne nezavisnosti $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ možemo zaključiti da za svako $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in R^{m+1}$ sistem linearnih jednačina po konstantama:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, \ldots, C_m) = C_1y_{11}^{(0)} + C_2y_{12}^{(0)} + \ldots + C_my_{1m}^{(0)} = y_1^{(0)}, \\ \varphi_2(x_0, C_1, \ldots, C_m) = C_1y_{21}^{(0)} + C_2y_{22}^{(0)} + \ldots + C_my_{2m}^{(0)} = y_2^{(0)}, \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \varphi_m(x_0, C_1, \ldots, C_m) = C_1y_{m1}^{(0)} + C_2y_{m2}^{(0)} + \ldots + C_my_{mm}^{(0)} = y_m^{(0)} \end{cases} \tag{1}$$

ima jedinstveno rešenje:

$$\begin{cases} C_1 = C_1^{(0)} = \psi_1(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_1^{(0)}) = \dfrac{W_1(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)}{W(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)}, \\ C_2 = C_2^{(0)} = \psi_2(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_1^{(0)}) = \dfrac{W_2(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)}{W(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)}, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ C_m = C_m^{(0)} = \psi_m(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_1^{(0)}) = \dfrac{W_m(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)}{W(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)} \end{cases}$$

za neke linearne funkcije $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m : R^{m+1} \longrightarrow R$ određene po *Kramerovim formulama* i za tačku $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Može se pokazati da funkcije

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x) = \varphi_1(x, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m = y_m(x) = \varphi_m(x, C_1^{(0)}, \ldots, C_{m^{(0)}}) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R; \end{cases}$$

na osnovu (1), ispunjavaju:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = \varphi_1(x_0, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) = y_1^{(0)}, \\ y_2(x_0) = \varphi_2(x_0, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) = y_2^{(0)}, \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m(x_0) = \varphi_m(x_0, C_1^{(0)}, \ldots, C_m^{(0)}) = y_m^{(0)}. \end{cases}$$

Ovim je dokazano da je rešenje $\vec{y}$ opšte. □

Definicija 3.4. *Za homogeni sistem* $[1]_H$ *niz* $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ *od* m *linearno nezavisnih rešenja nazivamo* fudementalni niz rešenja homogenog sistema $[1]_H$, *a pojedina rešenja* $\vec{y}_i$ *nazivamo* fudamentalnim rešenjima.

Neka je $\mathsf{A} = [\,a_{ij}\,]$ matrica koeficijenata gde su $a_{ij} = a_{ij}(x) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ neprekidne funkcije na $[\alpha, \beta]$ i neka je:

$$Tr(\mathsf{A}(t)) = a_{11}(t) + \ldots + a_{mm}(t) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$$

trag matrice A. Tada za $x_0 \in (\alpha, \beta)$ važi *formula Ostrogradskog–Liuvila*:

$$W(x, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m) = W(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)\, exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} Tr(\mathsf{A})\, dt \right).$$

Direktna posledica formule Ostrogradskog–Liuvila jeste da važi $W(x, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m) \equiv 0$ na $[\alpha, \beta]$ ako i samo ako $W(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m) = 0$ bar u jednoj tački $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Važe tvrđenja.

Teorema 3.5. *Neka je dat homogen sistem* $[1]_H$ *sa matricom koeficijnata* $\mathsf{A} = [\,a_{ij}\,]$ *gde su* $a_{ij} = a_{ij}(x) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ *neprekidne funkcije na* $[\alpha, \beta]$ *i neka je fiksirana tačka* $x_0 \in [\alpha, \beta]$. *Za svaki koordinatni vektor* $\vec{e}_i = [\,0 \quad \ldots 0 \quad 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0\,]^T$ *postoji partikularno rešenje* $\vec{y}_i$ *takvo da ispunjava Košijev početni uslov*:

$$(**)_i \qquad \vec{y}_i(x_0) = \vec{e}_i,$$

redom za $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Dokaz. Primetimo da su vektorske funkcije:

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_m) \\ f_2(x, y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(x, y_1, \ldots, y_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{12}(x)y_2 + a_{1m}(x)y_m \\ a_{21}(x)y_1 + \ldots + a_{22}(x)y_2 + a_{2m}(x)y_m \\ \vdots \\ a_{m1}(x)y_1 + \ldots + a_{m2}(x)y_2 + a_{mm}(x)y_m \end{bmatrix} = \mathsf{A}\,\vec{y} \,:\, D \longrightarrow R,$$

za ma koji izbor oblasti $D \subseteq R^{m+1}$, uvek neprekidne. Fiksirajmo $x_0 \in [\alpha, \beta]$ i biramo oblast D tako da

$$(x_0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in D,$$

za svako $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tada su ispunjeni uslovi Peanove teoreme i postoje rešenja $\vec{y}_i = \vec{y}(x)_i : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ koja ispunjavaju Košijev početni uslov $(**)_i$ za svako $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. $\Box$

Teorema 3.6. *Za homogeni sistem* $[1]_H$ *postoji bar jedan fudamentalan niz rešenja.*

Dokaz. Za tačku $x_0 \in [\alpha, \beta]$ formirajmo niz vektora $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ koji jesu rešenja homogenog sistema $[1]_H$ i koja ispunjavaju uslove $(**)_1, \ldots, (**)_m$ prethodne Teoreme 3.5. respektivno. Takav niz rešenja je linearno nezavisan jer vrednost Vronskijana iznosi:

$$W(x_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Samim tim niz vektora $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_m$ je fudamentalan. $\Box$

Napomena 3.7. *Ako su funkcije koeficijenata* $a_{ij} = a_{ij}(x) : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ *neprekidne, tada su one i ograničene na kompaktnom skupu* $[\alpha, \beta]$. *Može se pokazati na osnovu Pikarove teoreme fudementalan niz rešenja homogenog sistema* $[1]_H$ *je i jedinstven (pri posmatranim početnim uslovima iz Teoreme* 3.5.).

Nehomogeni sistemi

Neka je dat nehomogen sistem:

[1] $$\vec{y}\,' = \mathsf{A}\vec{y} + \vec{b}.$$

Tada važi tvrđenje.

Teorema 3.8. *Neka je dat nehomogen sistem* [1] *sa matricom neprekidnih koeficijenata* $\mathsf{A} = [\,a_{ij}\,]$ *i vektorom neprekidnih slobodnih članova* $\vec{b}$. *Opšte rešenje* $\vec{y}$ *ma kog nehomogenog sistema* [1] *je dato u obliku zbira*:

$$\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h,$$

gde je $\vec{y}_p$ *ma koje partikulano rešenje nehomogenog sistema* [1] *i gde je* $\vec{y}_h$ *opšte rešenje odgovarajućeg homogenog sistema* $[1]_H$.

Neka je $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ fudamentalni niz rešenja homogenog sistema $[1]_H$ tada je tim nizom određena *fundamentalna matrica*:

$$\Phi = \Phi(x) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mm} \end{bmatrix}.$$

Matrica $\Phi = \Phi(x)$ je regularna za svako $x \in [\alpha, \beta]$. Važi tvrđenje.

Teorema 3.9. *Za neku tačku* $x_0 \in [\alpha, \beta]$ *i Košijevo početni uslov* $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ *jedno Košijevo rešenje polaznog nehomogenog sistema* [1] *je dato sa*:

$$\vec{y}_p = \vec{y}_p(x) = \Phi(x)\,\Phi(x_0)^{-1}\,\vec{y}_0 \;+\; \Phi(x)\int\limits_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1}\vec{b}(t)\,dt \qquad \big(x \in [\alpha, \beta]\big).$$

Prethodna teorema daje postupak za određivanje jednog partikularnog rešenja i samim tim, saglasno Teoremi 3.8., moguće je naći opšte rešenje polaznog nehomogenog linearnog sistema. U praksi češće se koristi Lagranžova metoda varijacije konstanti koju izlažemo u narednom delu.

3.2 Lagranžova metoda varijacije konstanti

U ovom delu razmatramo Lagranžov metod varijacije konstanti za nehomogen linearni sistem diferencijalnih jednačina i pokazujemo da iz njega može izvesti Lagranžov metod varijacije konstanti za nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu (po jednoj funkciji).

Lagranžova metoda varijacije konstanti za nehomogen linearni sistem diferencijalnih jednačina

Neka je dat nehomogen sistem:

[1] $$\vec{y}\,' = \mathsf{A}\vec{y} + \vec{b}$$

i neka je određeno opšte rešenje odgovarajućeg homogenog sistema $[1]_H$ dato sa:

$$\vec{y} = c_1\vec{y}_1 + \ldots + c_m\vec{y}_m,$$

gde su $c_1, \ldots, c_m$ realne konstante i gde je $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ fudamentalni niz rešenja homogenog sistema. Izlažemo metod rešavanja nehomogenog sistema [1] tražeći rešenje u obliku:

$$\vec{y} = C_1(x)\vec{y}_1 + \ldots + C_m(x)\vec{y}_m,$$

gde su $C_1(x), \ldots, C_m(x)$ diferencijabilne funkcije i gde je $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m$ fudamentalni niz rešenja homogenog sistema. Koristimo zapis preko sume:

$$\boldsymbol{\vec{y} = \sum_{k=1}^{m} C_k(x)\vec{y}_k}\,.$$

Sa jedne strane zamenom $\vec{y} = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k(x)\vec{y}_k$ u polazni matrično zapisan linearan sistem [1] dobijamo:

[2] $$\vec{y}\,' = \mathsf{A}\,\vec{y} + \vec{b} = \mathsf{A}\,\sum_{k=1}^{m} C_k(x)\vec{y}_k + \vec{b}.$$

Sa druge strane traženjem izvoda vektora $\vec{y} = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k(x)\vec{y}_k$ po koordinatama dobijamo:

[3] $$\begin{aligned}
\vec{y}\,' &= \left(\sum_{k=1}^{m} C_k(x)\vec{y}_k\right)' \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(C_k(x)\vec{y}_k\Big)' \\
&= \sum_{k=1}^{m} \Big(C_k(x)'\vec{y}_k + C_k(x)\vec{y}_k\,'\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} C_k(x)'\vec{y}_k + \sum_{k=1}^{m} C_k(x)\,\boldsymbol{\vec{y}_k{}'} \\
&= \sum_{k=1}^{m} C_k(x)'\vec{y}_k + \sum_{k=1}^{m} C_k(x)\mathsf{A}\boldsymbol{\vec{y}_k} \\
&= \mathsf{A}\sum_{k=1}^{m} C_k(x)\boldsymbol{\vec{y}_k} + \sum_{k=1}^{m} C_k(x)'\vec{y}_k;
\end{aligned}$$

pri tom u prethodnom izvođenju naznačena je činjenica da su $\boldsymbol{\vec{y}_k}$ ***rešenja*** $\boldsymbol{[1]_H}$.

Poredeći [2] i [3] dobijamo sistem uslova za $C_1(x)', \ldots, C_m(x)'$ sa vektorskom jednakošću:

[4] $$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{m} C_k(x)'\,\vec{y}_k = \vec{b}}\,;$$

tj.

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{m} C_k(x)' \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}},$$

odnosno eksplicitno:

(4) $$\boldsymbol{\left\{\begin{array}{rl}
C_1(x)'y_{11} + C_2(x)'y_{12} + \ldots + C_m(x)'y_{1m} &= b_1, \\
C_1(x)'y_{21} + C_2(x)'y_{22} + \ldots + C_m(x)'y_{2m} &= b_2, \\
&\vdots \\
C_1(x)'y_{m1} + C_2(x)'y_{m2} + \ldots + C_m(x)'y_{mm} &= b_m.
\end{array}\right\}}$$

Lagranžova metoda varijacije konstanti za nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu

Neka je data nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

$$(*)\qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f : D_1 \longrightarrow R$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq R$. Diferencijalna jednačina $(*)$ je ekvivaletna sa sistemom:

$$[*]\qquad \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \ldots & -a_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

gde su uvedene funkcije

$$y_1 = y, y_2 = y_1' = y'', y_3 = y_2 = y''', \ldots, y_n = y_{n-1}' = y^{(n)}$$

kojima je formiran sistem $[*]$. Takođe iz nehomogenog linearnog sistema diferencijalnih jednačina $[*]$ dobija se nehomogena linearna diferencijalna jednačina $(*)$ po y. Dalje, neka je

$$\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots, \mathcal{Y}_n$$

fundamentalni niz za $(*)$. Tada je

$$\vec{\mathcal{Y}}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_1 \\ \mathcal{Y}_1' \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_1^{(n-1)} \\ \mathcal{Y}_1^{(n)} \end{bmatrix}, \vec{\mathcal{Y}}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_2 \\ \mathcal{Y}_2' \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_2^{(n-1)} \\ \mathcal{Y}_2^{(n)} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{\mathcal{Y}}_n = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_n \\ \mathcal{Y}_n' \\ \vdots \\ \mathcal{Y}_n^{(n-1)} \\ \mathcal{Y}_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

fundamentalni niz za $[*]$. Odatle iz Lagranžovog metoda varijacije konstanti za nehomogene linearne sistem diferencijalnih jednačina sleduje Lagranžo metod varijacije konstanti za nehomogenu linearnu diferencijalnu jednačinu. ■

Zadatak. *Rešiti nehomogeni sistem linearnih jednačina Lagranžovom metodom varijacije konstanti:*

$$(*)\qquad \begin{cases} y_1' = y_2 + 2x, \\ y_2' = -y_1 + 3. \end{cases}$$

Rešenje. Odgovarajući homogeni sistem:

$$(*)_H\qquad \begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

kao što je ranije razmatrano, ima opšte rešenje:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cos x + c_2 \sin x, \\ y_2 &= c_1 (-\sin x) + c_2 \cos x; \end{aligned}$$

za neke realne konstante c_1 i c_2. Napomenimo da vektorske funkcije

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}, \ \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

određuju fundamentalni niz za polazni sistem. Tražimo opšte rešenje nehomogenog sistema u obliku:

$$y_1 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x,$$
$$y_2 = C_1(x)\,(-\sin x) + C_2(x)\cos x;$$

za diferencijabilne funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ takve da ispunjavaju vezu metode varijacije konstanti:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1(x)'\,(\cos x) + C_2(x)'\,(\sin x) = \boldsymbol{2x}, \\ C_1(x)'\,(-\sin x) + C_2(x)'\,(\cos x) = \boldsymbol{3}. \end{array} \right\}$$

Prema Kramerovim formulama:

$$C_1(x)' = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{2x} & \sin x \\ \boldsymbol{3} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = 2x\cos x - 3\sin x$$

$$\Longrightarrow \qquad C_1(x) = \int (2x\cos x - 3\sin x)\,dx = 2\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} - 3\int \sin x\,dx$$
$$= 2\left(\underbrace{x}_{u}\,\underbrace{(\sin x)}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}\right) - 3\int \sin x\,dx$$
$$= 2\left(x\sin x + \cos x\right) + 3\cos x + c_1 = 5\cos x + 2x\sin x + c_1$$

i

$$C_2(x)' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & \boldsymbol{2x} \\ -\sin x & \boldsymbol{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = 3\cos x + 2x\sin x$$

$$\Longrightarrow \qquad C_2(x) = \int (3\cos x + 2x\sin x)\,dx = 3\int \cos x\,dx + 2\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\sin x\,dx}_{dv}$$
$$= 3\sin x + 2\left(\underbrace{x}_{u}\,\underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\underbrace{dx}_{du}\right)$$
$$= 3\sin x - 2x\cos x + 2\sin x + c_2 = 5\sin x - 2x\cos x + c_2,$$

za neke realne konstante c_1 i c_2. Sveukupno, opšte rešenje polaznog sistema je dato sa:

$$y_1 = \underbrace{(5\cos x + 2x\sin x + c_1)}_{=C_1(x)}\cos x + \underbrace{(5\sin x - 2x\cos x + c_2)}_{=C_2(x)}\sin x\,,$$
$$y_2 = -\underbrace{(5\cos x + 2x\sin x + c_1)}_{=C_1(x)}\sin x + \underbrace{(5\sin x - 2x\cos x + c_2)}_{=C_2(x)}\cos x\,.$$

Odatle je

$$y_1 = (5\cos^2 x + 2x\sin x\cos x + c_1\cos x) + \left(5\sin^2 x - 2x\sin x\cos x + c_2\sin x\right),$$
$$y_2 = \left(-5\cos x\sin x - 2x\sin^2 x - c_1\sin x\right) + (5\sin x\cos x - 2x\cos^2 x + c_2\cos x);$$

što dovodi do opšteg rešenja nehomogenog sistema u sređenoj formi:

$$\boldsymbol{y_1 = 5 + c_1\cos x + c_2\sin x},$$
$$\boldsymbol{y_2 = -2x - c_1\sin x + c_2\cos x};$$

za neke realne konstante c_1 i c_2. □

Na kraju navodimo jedno tvrđenje o partikularnom rešenju kada je slobodan član sistema dat u obliku sume.

Teorema 3.10. (*Teorema superpozicije*)
Neka je dat sistem linearnih diferencijalnih jednačina

[1] $$\vec{y}\,' = \mathsf{A}\,\vec{y} + \vec{b}$$

za neku matricu koeficijenata A *i za vektor kolonu slobodnih članova datu u obliku*

$$\vec{b} = \vec{b}_1 + \ldots + \vec{b}_k\ ,$$

zbira nekih vektor kolona slobodnih članova $\vec{b}_i$ *za* $i = 1, \ldots, k$ *i* $k \in N$*. Ako je*

$$\vec{y}_{p_1} \text{ - partikularno rešenje sistema } \vec{y}\,' = \mathsf{A}\vec{y} + \vec{b}_1,$$
$$\vdots$$
$$\vec{y}_{p_k} \text{ - partikularno rešenje sistema } \vec{y}\,' = \mathsf{A}\vec{y} + \vec{b}_k,$$

tada je:

$$\vec{y}_p = \vec{y}_{p_1} + \ldots + \vec{y}_{p_k}$$

partikularno rešenje polaznog linearnog sistema diferencijalnih jednačina [1].

3.3 Sistemi linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Definisanje. *Sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa realnim konstantnim koeficijentima* je sistem:

(1) $$\begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_m + b_1(x), \\ y_2' &= a_{21}y_1 + \ldots + a_{2m}y_m + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_m' &= a_{m1}y_1 + \ldots + a_{mm}y_m + b_m(x); \end{cases}$$

za zadate realne konstante $a_{ij}\in R$ *koeficjente sistema* $(i,j\in\{1,2,\ldots,m\})$. Sa koeficijentima sistema određena je matrica sistema $\mathsf{A}=\left[\,a_{ij}\,\right]\in R^{m\times m}$. Funkcije $b_i=b_i(x):[\alpha,\beta]\longrightarrow R$ se nazivaju *slobodni članovi* $(i\in\{1,2,\ldots,m\})$.

Matrični zapis sistema. Uvedimo oznake:

$$\vec{y}=\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix},\quad \vec{y}\,'=\begin{bmatrix} y_1'\\ y_2'\\ \vdots\\ y_m'\end{bmatrix},\quad \mathsf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}\end{bmatrix}\in R^{m\times m},\quad \vec{b}(x)=\begin{bmatrix} b_1(x)\\ b_2(x)\\ \vdots\\ b_m(x)\end{bmatrix}.$$

Matrični zapis sistema (1) je dat sa:

$$[1]\qquad \vec{y}\,'=\mathsf{A}\vec{y}+\vec{b}(x).$$

Specijalno *matrični zapis homogenog sistema* je dat sa:

$$[1]_H\qquad \vec{y}\,'=\mathsf{A}\vec{y},$$

pri čemu podrazumevamo $\vec{b}=\vec{0}=[\,0\;\;0\;\;\ldots\;\;0\,]^T$.

METODE REŠAVANJA HOMOGENOG SISTEMA. Neka je dat homogen sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa realnim konstantnim koeficijentima:

$$(1)_H\qquad \begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1+\ldots+a_{1m}y_m,\\ y_2' &= a_{21}y_1+\ldots+a_{2m}y_m,\\ &\vdots\\ y_m' &= a_{m1}y_1+\ldots+a_{mm}y_m.\end{cases}$$

U razmatranju koje dalje navodimo razmatramo jedan metod rešavanja homogenog sistema $(1)_H$.

Ojlerov matrični metod. Postoje razne metode za rešavanje homogenog sistema $(1)_H$, jedan često korišćen pristup se zasniva na upotrebi Laplasove transformacije. Ovde izlažemo detaljno Ojlerov matrični metod za rešavanje homogenog sistema $(1)_H$. U ovoj metodi tražimo partikularno rešenje $(1)_H$ po koordinatama u obliku:

$$(2)\qquad y_1=\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x},\, y_2=\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x},\ldots, y_m=\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x},$$

za nepoznate kompleksne konstante $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ i kompleksan parametar $\boldsymbol{\lambda}$. Zamenom (2) u $(1)_H$ dobijamo:

$$\begin{cases} \big(\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}\big)' &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}+\ldots+a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x},\\ \big(\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}\big)' &= a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}+\ldots+a_{2m}\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x},\\ &\vdots\\ \big(\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x}\big)' &= a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}+a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}+\ldots+a_{mm}\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x};\end{cases}$$

samim tim za nepoznate konstante $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ i parametar $\boldsymbol{\lambda}$ mora biti ispunjeno:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}\boldsymbol{\lambda} &= a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}+\ldots+a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x},\\ \boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}\boldsymbol{\lambda} &= a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}+\ldots+a_{2m}\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x},\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x}\boldsymbol{\lambda} &= a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1e^{\boldsymbol{\lambda}x}+a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2e^{\boldsymbol{\lambda}x}+\ldots+a_{mm}\boldsymbol{\alpha}_me^{\boldsymbol{\lambda}x};\end{cases}$$

tj. deljenjem sa kompleksnim brojem $e^{\boldsymbol{\lambda}x} \neq 0$ dobijamo *homogeni linearni sistem* po $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ za ma koji izbor kompleksnog parametra $\boldsymbol{\lambda}$:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (a_{11}-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m & = & 0, \\ a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1 + (a_{22}-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + a_{1m}\boldsymbol{\alpha}_m & = & 0, \\ & \vdots & \\ a_{m1}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{m2}\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + (a_{mm}-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\alpha}_m & = & 0. \end{array} \right.$$

Prethodni homogeni linearni sistem $(\mathcal{S}_0)$ nazivamo *karakteristični sistem* i možemo ga zapisati vektorski:

$$(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\mathbf{0}},$$

gde je

$$\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix} \; - \; \textit{karakteristični vektor.}$$

Primetimo da karakterističan sistem je homogen i ima *trivijalno rešenje*:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \ldots = \boldsymbol{\alpha}_m = 0.$$

Potreban i dovoljan uslov da prethodni homogeni linearni sistem $(\mathcal{S}_0)$ ima *netrivijalno rešenje* po konstanatama $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$, tj. takvo rešenje da važi:

$$\neg\,(\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \ldots = \boldsymbol{\alpha}_m = 0)$$

je dat uslovom vezanim za determinantu sistema:

$$P_m(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\boldsymbol{\lambda}) & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & (a_{22}-\boldsymbol{\lambda}) & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & (a_{mm}-\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = 0,$$

po parametru $\boldsymbol{\lambda}$. Dakle, za parametar $\boldsymbol{\lambda}$ se zahteva da je rešenje *karakteristične jednačine*:

$$P_m(\boldsymbol{\lambda}) = b_m\boldsymbol{\lambda}^m + b_{m-1}\boldsymbol{\lambda}^{m-1} + \ldots + b_1\boldsymbol{\lambda} + b_0 = 0,$$

sa koeficjentima $b_0, b_1, \ldots, b_m$ i $b_m \neq 0$. Polinom $P_m(\boldsymbol{\lambda})$ nazivamo *karakteristični polinom* i važe dobro poznate formule:

$$b_m = (-1)^m,\; b_{m-1} = (-1)^{m-1}\mathrm{Tr}(A) \;\text{ i }\; b_0 = |A|.$$

Koren (nulu) $\boldsymbol{\lambda}$ karakteristične jednačine $P_m(\boldsymbol{\lambda})=0$ nazivamo *karakteristični koren* ili *karakteristična vrednost* realne matrice A homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina $(1)_H$. U tom slučaju se javlja netrivijalno rešenje po koordinatama

$$y_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 e^{\boldsymbol{\lambda}x}, y_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 e^{\boldsymbol{\lambda}x}, \ldots, y_m = \boldsymbol{\alpha}_m e^{\boldsymbol{\lambda}x}.$$

Zaključak je da ako kompleksni parametar $\boldsymbol{\lambda}$ jeste koren karakteristične jednačine, da tada Ojlerovom metodom dobijamo netrivijalne kompleksne vektorske funkcije rešenja $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{bmatrix}^T$ homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina $(1)_H$. Inače, ako kompleksni parametar $\boldsymbol{\lambda}$ nije koren karakteristične jednačine tada je $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 = \ldots = \boldsymbol{\alpha}_m = 0$, odnosno u tom slučaju se javlja trivijalno rešenje po koordinatama

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0,$$

čime je određeno samo trivijalno rešenje $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$ homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina $(1)_H$.

Primena linearne algebre u Ojlerovoj metodi za rešavanje $(1)_H$

Polazimo od kvadratne realne matrice koeficijenata A reda $\boldsymbol{m}$ i od kompleksnog vektorskog prostora $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{m}}$ svih uređenih $\boldsymbol{m}$-torki sa skalarima iz skupa kompleksnih brojeva $\boldsymbol{C}$. Tako razmatran vektorski prostor je $\boldsymbol{m}$-dimenzionalan. Nadalje neka je kompleksni parametar $\boldsymbol{\lambda}$ karakteristična vrednost kvadratne matrice A.

Karakteristični prostor matrice A, koji odgovara karakterističnoj vrednosti $\boldsymbol{\lambda}$, označavamo $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ i određujemo kao skup svih vektora $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ u $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{m}}$ koji su rešenje karakterističnog sistema $(\mathcal{S}_0)$ uključujući i nula vektor $\vec{\mathbf{0}}$, tj.

$$V_{\boldsymbol{\lambda}} \stackrel{def}{=} \left\{ \vec{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{m}} \,\middle|\, (\mathsf{A}-\lambda \mathrm{I})\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\mathbf{0}} \right\}.$$

Teorema 3.11. *Karakteristični prostor* $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ *je vektorski potprostor kompleksnog prostora* $\boldsymbol{C}^{m}$.

Dokaz. Za ma koja dva vektora $\vec{\boldsymbol{\alpha}}, \vec{\boldsymbol{\beta}} \in V_{\boldsymbol{\lambda}}$ i ma koja dva skalara $\mu, \nu \in C$ ispunjen uslov

$$\mu\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \nu\,\vec{\boldsymbol{\beta}} \in V_{\boldsymbol{\lambda}},$$

čime je tvrđenje dokazano ■

Posledica prethodnog tvrđenja je da karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}}$, kao potprostor $\boldsymbol{m}$-dimenzionalnog vektorskog potprostora $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{m}}$, ima *bazu karakterističnog potprostora* određenu kao niz od $\boldsymbol{\kappa}$ vektora:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ \vdots \\ v_{1m} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{v}_{\boldsymbol{\kappa}} = \begin{bmatrix} v_{\boldsymbol{\kappa}1} \\ v_{\boldsymbol{\kappa}2} \\ \vdots \\ v_{\boldsymbol{\kappa}m} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{m}};$$

gde je $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{dim}\,(\boldsymbol{V_\lambda}) \leq \boldsymbol{m}$. Tada se taj vektorski potprostor određuje kao lineal baznih vektora:

$$V_{\boldsymbol{\lambda}} = \mathcal{L}\left(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{\boldsymbol{\kappa}}\}\right).$$

Broj $\boldsymbol{\kappa}$ nazivamo *geometrijska dimenzija* vektorskog potprostora $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ koji odgovara karakterističnoj vrednosti $\boldsymbol{\lambda}$. Broj $\boldsymbol{n}$ algebarska višestrukost karakteristične vrednosti $\boldsymbol{\lambda}$ se naziva *algebarska dimenzija* vektorskog potprostora $V_{\boldsymbol{\lambda}}$. Tada važi tvrđenje.

Teorema 3.12. $\boldsymbol{\kappa} \leq \boldsymbol{n}$.

Postupak rešavanja. Za formiranje opšteg rešenja homogenog sitema dovoljno je formirati $\boldsymbol{m}$ linearno nezavisnih rešenja. Neka je $\mathsf{A} = [\,a_{ij}\,] \in R^{m\times m}$ matrica realnih koeficijenata homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina $(1)_H$. Ako su za matricu A određeni svi karakteristični koreni $\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_s$ redom algebarskih višestrukosti $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_s$; tada važi

$$\boldsymbol{n}_1 + \ldots + \boldsymbol{n}_s = \boldsymbol{m}.$$

Osnovni problem. Neka je $\boldsymbol{\lambda} \in \{\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_s\}$. Posmatrajmo karakteristični potprostor $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ koji odgovara karakterističnoj vrednosti $\boldsymbol{\lambda}$ geomertijske dimenzije $\boldsymbol{\kappa}$ i algebarske dimenzije (višestrukosti) $\boldsymbol{n}$. Cilj je odrediti tačno $\boldsymbol{n}$ linearno nezavisnih realnih vektor rešenja polaznog homogenog linearnog sistema diferencijalnih jednačina $[1]_H$, vezano za $\boldsymbol{\lambda}$.

Ako je $\boldsymbol{\lambda}$ kompleksan broj, tada Ojlerovom metodom je $\vec{z} = \vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}} \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x}$ rešenje polaznog homogenog linearnog sistema diferencijalnih jednačina $[1]_H$ za neki (kompleksni) vektor $\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}} \in V_{\boldsymbol{\lambda}}$. U kompleksnom slučaju koristimo sledeće tvrđenje kojim iz kompleksnog rešenja izdvajamo par realnih rešenja.

Teorema 3.13. *Ako je* $\vec{z}$ *kompleksno vektor rešenje homogenog sistema* $(*)_H$, *tada su realne vektorske funkcije* $\vec{y}_1 = \mathrm{Re}(\vec{z})$ *i* $\vec{y}_2 = \mathrm{Im}(\vec{z})$ *takođe rešenja homogenog sistema* $(*)_H$.

Dokaz. Važi

$$\mathsf{A}\vec{z} = \vec{0} \iff \mathsf{A}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2\,\boldsymbol{i}) = \vec{0} \iff (\mathsf{A}\vec{y}_1) + (\mathsf{A}\vec{y}_2)\,\boldsymbol{i} = \vec{0} \implies \mathsf{A}\vec{y}_1 = \vec{0} \wedge \mathsf{A}\vec{y}_2 = \vec{0}.$$ ■

Navodimo dva postupka rešavanja osnovnog problema.

***I*: $\boldsymbol{\kappa = dim\,(V_\lambda) = n}$.**

U cilju izdvajanja linearno nezavisnih realnih vektorskih funkcija rešenja, koristimo sledeće tvrđenje.

Stav 1. *Neka je* $\mathsf{A} = [\,a_{ij}\,]$ *matrica realnih koeficijenata homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina* $(1)_H$. *Tada važi:*

1) *Ako je* $\boldsymbol{\lambda}$ *realan karakterističan koren, tada je* $\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}} \in V_{\boldsymbol{\lambda}} = \Big\{ \vec{\boldsymbol{\alpha}} \,\Big|\, (\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})\, \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\mathbf{0}} \Big\}$ *realan karakteristi-čan vektor. Realna vektorska funkcija:*

$$\vec{y} = \vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}} \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x}$$

određuje jedno realno partikularno rešenje homogenog linearnog sistema $(1)_H$. *Neka je* $dim\,(V_{\boldsymbol{\lambda}}) = \boldsymbol{\kappa}$ *tada postoje bazni vektori*

$$\big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_1, \ldots, \big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_{\boldsymbol{\kappa}}$$

realnog potprostora $V_{\boldsymbol{\lambda}}$. *Tada vektorske funkcije rešenja:*

$$\vec{y}_1 = \big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_1 \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x}, \ldots, \vec{y}_{\boldsymbol{\kappa}} = \big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x} \tag{1}$$

određuju $\boldsymbol{n = \kappa}$ *realnih linearno nezavisnih rešenja sistema* $(1)_H$.

2) *Ako je* $\boldsymbol{\lambda} = \alpha + \beta\, \boldsymbol{i}$ *kompleksan karakterističan koren, tada je* $\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}} \in V_{\boldsymbol{\lambda}} = \Big\{ \vec{\boldsymbol{\alpha}} \,\Big|\, (\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I})\, \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\mathbf{0}} \Big\}$ *kompleksan karakterističan vektor. Kompleksna vektorska funkcija rešenja:*

$$\vec{y} = \vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}} \cdot e^{(\alpha + \beta \boldsymbol{i})x} = (\mathrm{Re}(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}) + \mathrm{Im}(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}})\, \boldsymbol{i}) \cdot e^{\alpha x}\, (\cos \beta x + (\sin \beta x)\, \boldsymbol{i}) = \mathrm{Re}(\vec{y}) + \boldsymbol{i}\, \mathrm{Im}(\vec{y})$$

sa svojim realnim delom $\mathrm{Re}(\vec{y})$ *i svojim imaginarnim delom* $\mathrm{Im}(\vec{y})$ *određuje dva realna partikularna rešenja homogenog linearnog sistema* $(1)_H$. *Pri tom su* $\mathrm{Re}(\vec{y})$ *i* $\mathrm{Im}(\vec{y})$ *međusobno linearno nezavisna rešenja homogenog linearnog sistema* $(1)_H$. *Skup* $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ *određuje kompleksni potprostor dimenzije* $dim_C\,(V_{\boldsymbol{\lambda}}) = \boldsymbol{\kappa}$ *sa baznim vektorima*

$$\big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_1, \ldots, \big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_{\boldsymbol{\kappa}}.$$

Takođe, skup $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ *određuje realni potprostor dimenzije* $dim_R\,(V_{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathbf{2}\,\boldsymbol{\kappa}$ *sa baznim vektorima*

$$\mathrm{Re}\big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_1, \ldots, \mathrm{Re}\big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_{\boldsymbol{\kappa}}, \mathrm{Im}\big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_1 \boldsymbol{i}, \ldots, \mathrm{Im}\big(\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}}\big)_{\boldsymbol{\kappa}} \boldsymbol{i}.$$

Vektorske funkcije rešenja:

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{y}_1 = \mathrm{Re}\Big((\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}})_1 \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x}\Big), \ldots, \vec{y}_{\boldsymbol{\kappa}} = \mathrm{Re}\Big((\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x}\Big); \\ \vec{y}_{\boldsymbol{\kappa}+1} = \mathrm{Im}\Big((\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}})_1 \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x}\Big), \ldots, \vec{y}_{2\boldsymbol{\kappa}} = \mathrm{Im}\Big((\vec{v}_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\kappa}} \cdot e^{\boldsymbol{\lambda} x}\Big). \end{array} \right\} \tag{2}$$

određuju $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}\,\boldsymbol{\kappa}$ *realnih linearno nezavisnih rešenja sistema* $(1)_H$.

Napomena 3.14. *U vezi prethodnog tvrđenja u nizu* (1) *su navedene linearno nezavisne realne vektorske funkcije rešenja koje su Ojlerovog tipa, a sa druge strane u nizu* (2) *su navedene linearno nezavisne realne vektorske funkcije rešenja koje nisu Ojlerovog tipa.*

***II*: $\boldsymbol{\kappa = dim\,(V_\lambda) < n}$.**

Broj baznih vektora $\boldsymbol{\kappa}$ karakterističnog prostora $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ je nedovoljan za formiranje $\boldsymbol{n}$ linearno nezavisnih realnih vektorskih funkcija rešenja koje formiramo prema prethodnom delu. Tada, u cilju izdvajanja linearno nezavisnih realnih vektorskih funkcija rešenja, prvo razmatramo pojam *niza uopštenih karakterističnih vektora*. Naime, polazimo od (standardnog) karakterističnog vektora $\vec{v}_1 \in C^m$ kao *netrivijalnog vektora* rešenja homogenog linearnog sistema:

$$(A - \lambda I)\,\vec{v}_1 = \vec{0}.$$

Pri izboru inicajlnog karakterističnog vektora $\vec{v}_1 \in C^m$ *postoji* r *uopštenih karakterističnih vektora koji su rešenja sledećih linearnih sistema*:

$$\begin{array}{llcll}
(\exists \vec{v}_1 \in C^m \backslash \{\vec{0}\}) & (A - \lambda I)\,\vec{v}_1 & = & \vec{0} & \Big(\Longrightarrow \quad (A - \lambda I)\,\vec{v}_1 = \vec{0} \,\wedge\, \vec{v}_1 \neq \vec{0}\Big) \\
(\exists \vec{v}_2 \in C^m \backslash \{\vec{0}\}) & (A - \lambda I)\,\vec{v}_2 & = & \vec{v}_1 & \Big(\Longrightarrow \quad (A - \lambda I)^2\,\vec{v}_2 = \vec{0} \,\wedge\, \underbrace{(A - \lambda I)\,\vec{v}_2}_{\vec{v}_1} \neq \vec{0}\Big) \\
(\exists \vec{v}_3 \in C^m \backslash \{\vec{0}\}) & (A - \lambda I)\,\vec{v}_3 & = & \vec{v}_2 & \Big(\Longrightarrow \quad (A - \lambda I)^3\,\vec{v}_3 = \vec{0} \,\wedge\, \underbrace{(A - \lambda I)^2\,\vec{v}_3}_{\vec{v}_1} \neq \vec{0}\Big) \\
 & & \vdots & & \\
(\exists \vec{v}_{\nu-1} \in C^m \backslash \{\vec{0}\}) & (A - \lambda I)\,\vec{v}_{\nu-1} & = & \vec{v}_{r-2} & \Big(\Longrightarrow \quad (A - \lambda I)^{\nu-1}\,\vec{v}_{\nu-1} = \vec{0} \,\wedge\, \underbrace{(A - \lambda I)^{\nu-2}\,\vec{v}_{\nu-1}}_{\vec{v}_1} \neq \vec{0}\Big) \\
(\exists \vec{v}_{\nu} \in C^m \backslash \{\vec{0}\}) & (A - \lambda I)\,\vec{v}_{\nu} & = & \vec{v}_{\nu-1} & \Big(\Longrightarrow \quad (A - \lambda I)^{\nu}\,\vec{v}_{\nu} = \vec{0} \,\wedge\, \underbrace{(A - \lambda I)^{\nu-1}\,\vec{v}_{\nu}}_{\vec{v}_1} \neq \vec{0}\Big)
\end{array}$$

i pri tom linearni sistem $(A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{v}_\nu$ nema rešenja po $\vec{v}$, tj. važi:

$$(\forall \vec{v} \in C^m)\ \ (A - \lambda I)\,\vec{v} \neq \vec{v}_\nu\,.$$

Na prethodni način određujemo ν *uopštenih karakterističnih vektora*. Takav niz vektora ima <u>***svojstvo***</u>:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_{\nu-1}, \vec{v}_\nu \ - \ \textit{\textbf{linearno nezavisni u}}\ C^m.$$

Teorema 3.15. *Važi* $\nu \leq r = n - k + 1$ *i postoji takav izbor karakterističnog vektora* $\vec{v}_1$ *za koji je ispunjeno*:

$$\nu = r.$$

<u>**Primer.**</u> *Za matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

karaktristični polinom

$$P_3(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 1)^3$$

jeste stepena $m = 3$ *sa jednim karakterističnim korenom* $\lambda = 1$ *algebarske višestrukosti* $n = 3$ *u karakterističnom polinomu. Odredimo karakterističan prostor* V_λ *kao skup svih vektora* $\vec{v} = [\,\alpha \ \ \beta \ \ \gamma\,]^T$ *koji su rešenje karakterističnog sistema*

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (1 - \lambda)\alpha & = & 0 \\ \alpha + (1 - \lambda)\,\beta + \gamma & = & 0 \\ (1 - \lambda)\,\gamma & = & 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 0 & = 0, \\ \alpha + \gamma & = 0, \\ 0 & = 0. \end{array} \right\}$$

Karakteristični prostor V_λ *je realan dvodimenzionalan i određen sa*:

$$V_\lambda = \left\{ p \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ : \ p, q \in R \right\}.$$

Samim tim karakteristični koren $\boldsymbol{\lambda}=1$ *je geometrijske dimenzije*

$$\boldsymbol{\kappa = \dim(V_\lambda) = 2 < n = 3}\,,$$

pa dolazi do defekta geometrijske dimenzije. Uobičajeno je da za bazne vektore karakterističnog prostora $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ *izdvajamo vektore:*

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad i \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalje, polazeći od

$$\hat{\vec{v}}_1 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -p \end{bmatrix} \in V_{\boldsymbol{\lambda}}$$

odredimo kada postoji vektor

$$\hat{\vec{v}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$$

tako da predstavlja rešenje nehomogenog sistema:

$$(\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I})\,\hat{\vec{v}}_2 = \hat{\vec{v}}_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha+\gamma \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -p \end{bmatrix} ?$$

Ako je $p \neq 0$ *ne postoji vektor* $\hat{\vec{v}}_2$*; inače ako je* $p=0$*, birajući npr.* $q = 2\,(\neq 0)$ *nalazimo adekvatan izbor karakterističnog vektora*

$$\hat{\vec{v}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in V_{\boldsymbol{\lambda}}$$

za koji postoji vektor

$$\hat{\vec{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$$

tako da

$$(\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I})\,\hat{\vec{v}}_2 = \hat{\vec{v}}_1\,.$$

Pri tom za svaki izbor

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$$

važi

$$(\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I})\,\vec{v} \neq \hat{\vec{v}}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha+\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zaključak je da karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda} = 1$ *pridružujemo* maksimalno dva *uopštena karakteristična vektora, konkretno* $\hat{\vec{v}}_1, \hat{\vec{v}}_2$. □

Uvođenje pojma uopštenih karakterističnih vektora omogućava nam da iskažemo sledeće tvrđenje.

<u>**Stav 2.**</u> (*Formiranje* $\vec{\hat{y}}_j$ *rešenja*) *Neka je* $\mathsf{A}=[\,a_{ij}\,]\in R^{m\times m}$ *matrica realnih koeficijenata homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina* $(1)_H$. *Tada važi:*

1) *Neka je* <u>$\boldsymbol{\lambda}$ *realan karakterističan koren*</u> *algebarske višestrukosti* $\boldsymbol{n}$ *i neka je:*

$$\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}}, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{2}}, \ldots, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{r}}$$

niz od $\boldsymbol{r}$ *linearno nezavisnih realnih uopštenih karakterističnih vektora. Tada postoji niz od* $\boldsymbol{r}$ *linearno nezavisnih realnih vektora funkcija rešenja homogenog sistema* $(1)_H$ *određenih sa:*

$(*)_{\boldsymbol{\lambda}}$:

$$\underline{\vec{\hat{y}}_1 = \vec{\hat{y}}_1(x) = \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}}\, e^{\boldsymbol{\lambda} x}} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ \vdots \\ p_{1m} \end{bmatrix}}_{=\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}}} \right) e^{\boldsymbol{\lambda} x},$$

$$\underline{\vec{\hat{y}}_2 = \vec{\hat{y}}_2(x) = \Big(\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{2}} + \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}} x \Big)\, e^{\boldsymbol{\lambda} x}} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{2m} \end{bmatrix}}_{=\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{2}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ \vdots \\ p_{1m} \end{bmatrix}}_{=\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}}} x \right) e^{\boldsymbol{\lambda} x},$$

$$\underline{\vec{\hat{y}}_3 = \vec{\hat{y}}_3(x) = \Big(\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{3}} + \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{2}} x + \frac{1}{2}\, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}} x^2 \Big)\, e^{\boldsymbol{\lambda} x}} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} p_{31} \\ p_{32} \\ \vdots \\ p_{3m} \end{bmatrix}}_{=\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{3}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{2m} \end{bmatrix}}_{=\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{2}}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ \vdots \\ p_{1m} \end{bmatrix}}_{=\frac{1}{2}\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}}} x^2 \right) e^{\boldsymbol{\lambda} x},$$

$\vdots$

$$\underline{\vec{\hat{y}}_r = \vec{\hat{y}}_{\boldsymbol{r}}(x) = \Big(\frac{1}{0!}\, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{1!}\, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{r-1}}\, x + \frac{1}{2!}\, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{r-2}}\, x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}}\, x^{r-1} \Big)\, e^{\boldsymbol{\lambda} x}}$$

$$= \underline{\Big(\sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!}\, \vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{r-i}}\, x^i \Big)\, e^{\boldsymbol{\lambda} x}} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} p_{r1} \\ p_{r2} \\ \vdots \\ p_{rm} \end{bmatrix}}_{=\frac{1}{0!}\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{r}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{(r-1)1} \\ p_{(r-1)2} \\ \vdots \\ p_{(r-1)m} \end{bmatrix}}_{=\frac{1}{1!}\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{r-1}}} x + \ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ \vdots \\ p_{1m} \end{bmatrix}}_{=\frac{1}{(r-1)!}\vec{\hat{\boldsymbol{v}}}_{\mathbf{1}}} x^{r-1} \right) e^{\boldsymbol{\lambda} x},$$

za neke $p_{ij}\in R$. *Na ovaj način relnom korenu* $\boldsymbol{\lambda}$ *pridružujemo* $\boldsymbol{r}$ *linearno nezavisnih rešenja polaznog sistema:*

(1) $$\vec{\hat{y}}_1, \vec{\hat{y}}_2, \vec{\hat{y}}_3, \ldots, \vec{\hat{y}}_{\boldsymbol{r}}\,.$$

2) *Neka je* $\boldsymbol{\lambda}=\alpha+\beta\,\boldsymbol{i}$ *kompleksan karakterističan koren algebarske višestrukosti* $\boldsymbol{n}$ *i neka je:*

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}},\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}},\ldots,\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{r}}$$

niz od $\boldsymbol{r}$ *linearno nezavisnih kompleksnih uopštenih karakterističnih vektora. Tada postoji niz od* $\boldsymbol{r}$ *linearno nezavisnih kompleksnih vektora funkcija rešenja u oznaci*

$$\vec{\hat{z}}_1,\ldots,\vec{\hat{z}}_{\boldsymbol{r}}$$

za homogeni sistema $(1)_H$ *određenih sa formulama* $(*)_{\boldsymbol{\lambda}}$ *iz prethodnog dela. U ovom slučaju* $\mathbf{2}\boldsymbol{r}$ *linearno nezavisnih vektora realnih rešenja polaznog sistema je odrđeno razdvajanjem realnog i imaginarnog dela:*

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{c} \vec{\hat{y}}_1=\mathrm{Re}\Big(\vec{\hat{z}}_1\Big),\ldots,\vec{\hat{y}}_{j\boldsymbol{r}}=\mathrm{Re}\Big(\vec{\hat{z}}_{\boldsymbol{r}}\Big);\\ \vec{\hat{y}}_{\boldsymbol{r}+1}=\mathrm{Im}\Big(\vec{\hat{z}}_1\Big),\ldots,\vec{\hat{y}}_{2\boldsymbol{r}}=\mathrm{Im}\Big(\vec{\hat{z}}_{\boldsymbol{r}}\Big). \end{array}\right\}$$

Stav 3. *Neka je karakteristični koren* $\boldsymbol{\lambda}$ *algebarske višestrukosti* $\boldsymbol{n}$ *i geometrijske dimenzije* $\boldsymbol{\kappa}$. *Postoji adekvatan izbor baze* $\mathcal{B}=\langle\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_\kappa\rangle$ *za* $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ *tako da sa* $\vec{v}_1$ *se ostvaruje maksimalan broj*

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{1}$$

uopštenih karakterističnih vektora. Niz od $\boldsymbol{\kappa}$ *realnih vektorskih funkcija rešenja nastalih od baznih vektora iz* $V_{\boldsymbol{\lambda}}$*-karakterističnog prostora*

$$(I)\qquad \vec{y}_1,\vec{y}_2,\ldots,\vec{y}_{\boldsymbol{\kappa}}$$

moguće je dopuniti sa $\boldsymbol{r}-1$ *novih realnih vektorskih funkcija rešenja nastalih od uopšenih karakterističnih vektora*

$$(II)\qquad \vec{\hat{y}}_1\equiv\vec{y}_1,\vec{\hat{y}}_2,\ldots,\vec{\hat{y}}_{\boldsymbol{r}}\,.$$

Tada niz realnih vektorskih funkcija:

$$\vec{\hat{y}}_1\equiv\vec{y}_1,\vec{y}_2,\ldots,\vec{y}_{\boldsymbol{\kappa}},\vec{\hat{y}}_2,\ldots,\vec{\hat{y}}_{\boldsymbol{r}}$$

određuje jedan linearno nezavisan niz od $\boldsymbol{n}$ *rešenja.*

Završno tvrđenje. Na osnovu rešavanja *osnovnog problema* preko slučajeva $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{II}$ možemo da formulišemo sledeće završno tvrđenje kojim određujemo opšte rešenje polaznog sistema:

Stav 4. *Neka je* $\mathsf{A}=[\,a_{ij}\,]\in R^{m\times m}$ *matrica realnih koeficijenata homogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina* $(1)_H$. *Ako su za matricu* A *određeni svi karakteristični koreni* $\boldsymbol{\lambda}_1,\ldots,\boldsymbol{\lambda}_s$ *redom algebarskih višestrukosti* $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\ldots,\boldsymbol{n}_s$; *tada važi:*

$$\boldsymbol{n}_1+\ldots+\boldsymbol{n}_s=\boldsymbol{m}\,.$$

Neka je karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_j$, *pridruženo, prema* $\boldsymbol{I}$ *i* $\boldsymbol{II}$, *tačno* $\boldsymbol{n}_j$ *linearno nezavisnih realnih vektorskih funkcija rešenja:*

$$\vec{y}_{j1}(x),\ldots,\vec{y}_{j\boldsymbol{n}_j}(x),$$

za $j=1,\ldots,s$. *Tada opšte rešenje homogenog linearnog sistema* $(1)_H$ *je dato kao linearna kombinacija:*

$$\vec{y}=\vec{y}(x)=\sum_{j=1}^{s}\big(C_{j1}\vec{y}_{j1}(x)+\ldots+C_{j\boldsymbol{n}_j}\vec{y}_{j\boldsymbol{n}_j}(x)\big),$$

za proizvoljne realne konstante C_{jk} $\big(\,j=1,\ldots,s\,\wedge\,k=1,\ldots,\boldsymbol{n}_j\,\big)$.

Homogen sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantim koeficijentima, $m\!=\!3$:

Neka je dat sistem u obliku:

$$(1)_H \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z, \\ y' &= \frac{dy}{dt} = a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z, \\ z' &= \frac{dz}{dt} = a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z \end{aligned}$$

za zadane realne konstantne koeficijente $a_{ij} \in R$ i nepoznate realne diferencijabilne funkcije

$$\boldsymbol{x\!=\!x(t), y\!=\!y(t), z\!=\!z(t)}$$

definisane nad nekim intervalom – domenom sistema diferencijalnih jednačina. Postupak određivanja opšteg rešenja

$$\vec{w} = \vec{w}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

navodimo u daljem razmatranju.

1) Formiramo matricu sistema:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

i na osnovu nje računamo karakteristični polinom:

$$P_3(\lambda) = |\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix} = b_3\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0,$$

sa realnim koeficijentima:

$$b_3\!=\!-1, \quad b_2\!=\!a_{11}\!+\!a_{22}\!+\!a_{33}, \quad b_1\!=\!-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right), \quad b_0\!=\! \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2) Neka su određeni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ karakteristični koreni karakterističnog polinoma $P_3(\lambda)$.

Za svaki karakteristični koren λ_i rešavamo karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda_i) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda_i) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dat kao homogen linearan sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{aligned} (a_{11}-\lambda_i)\alpha_i + a_{12}\beta_i + a_{13}\gamma_i &= 0, \\ a_{21}\alpha_i + (a_{22}-\lambda_i)\beta_i + a_{23}\gamma_i &= 0, \\ a_{31}\alpha_i + a_{32}\beta_i + (a_{33}-\lambda_i)\gamma_i &= 0 \end{aligned} \right\}$$

po karakterističnom vektoru:

$$\vec{v}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix}.$$

Karakteristični prostor koji odgovara karakterističnom korenu λ_i je skup vektora:

$$V_{\lambda_i} = \Big\{ \vec{v}_i \,:\, (\mathsf{A} - \lambda_i \mathrm{I})\, \vec{v}_i = \vec{0} \Big\}.$$

Za karakterističnu vrednost λ_i *algebarske višestrukosti* $n \leq m = 3$, njegovu geometrijsku višestrukost označavamo sa:

$$\kappa = \dim(V_{\lambda_i}).$$

Bitno je istaći da ako je λ_i jednostruk koren tada je karakteristični prostor V_{λ_i} jednodimenzionalan. Samim tim:

$$1 \leq \kappa \leq n.$$

U postupku nalaženja opšteg rešenja sistema $(1)_H$ za $m = 3$ razlikujemo *sedam*$^{*)}$ *mogućih slučajeva* vršeći klasifikaciju prema realnosti/kompleksnosti i algebarskoj/geometrijskoj dimenziji korena:

(*i*) $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R \ \wedge \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3}$

(*ii*) $\boldsymbol{\lambda_1 \in R,\ \lambda_{2,3} \in C \ \wedge \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3}$

(*iii*) $\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \ \wedge \ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \ \wedge \ \dim(V_{\lambda_{1,2}}) = 1}$

(*iv*) $\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \ \wedge \ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \ \wedge \ \dim(V_{\lambda_{1,2}}) = 2}$

(*v*) $\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \ \wedge \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ \wedge \ \dim(V_{\lambda_{1,2,3}}) = 1}$

(*vi*) $\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \ \wedge \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ \wedge \ \dim(V_{\lambda_{1,2,3}}) = 2}$

(*vii*) $\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \ \wedge \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ \wedge \ \dim(V_{\lambda_{1,2,3}}) = 3}$

Primetimo da u slučajevima **(*iii*)**, **(*v*)** i **(*vi*)** dolazi do *defekta geometrijske dimenzije* u smislu da je geometrijska dimenzija manja od algebarske dimenzije.

(*i*) $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3}$:

Svaki karakteristčni prostor $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, V_{\lambda_3}$ je realani jednodimenzionalani. Tada postoje bazni vektori iz razmatranih prostora:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_1}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_2}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_3}.$$

Ti vektori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ su karaktritčni vektori. Na osnovu ta tri vektora formiramo tri linearno nezavisne vektorske funkcije rešenja:

$$\vec{y}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \beta_1 e^{\lambda_1 t} \\ \gamma_1 e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \beta_2 e^{\lambda_2 t} \\ \gamma_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} \alpha_3 e^{\lambda_3 t} \\ \beta_3 e^{\lambda_3 t} \\ \gamma_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

$^{*)}$ $F_0 + F_1 + F_2 + F_3 = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$ (?)

Opšte rešenje je linearna kombinacija:

$$\vec{w} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 + C_3\vec{y}_3 = \begin{bmatrix} C_1(\alpha_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2(\alpha_2 e^{\lambda_2 t}) + C_3(\alpha_3 e^{\lambda_3 t}) \\ C_1(\beta_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2(\beta_2 e^{\lambda_2 t}) + C_3(\beta_3 e^{\lambda_3 t}) \\ C_1(\gamma_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2(\gamma_2 e^{\lambda_2 t}) + C_3(\gamma_3 e^{\lambda_3 t}) \end{bmatrix},$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, C_2, C_3 \in R$ i parametar $t \in R$.

Zadatak 1. *Rešiti homogeni linearni sistem diferencijalnih jedenačina sa konstantnim koeficijentima:*

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z, \\ y' &= x + 2y - z, \\ z' &= x - y + 2z. \end{aligned}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{\lambda_{1,2,3}} \in \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{\lambda_1} \neq \boldsymbol{\lambda_2} \neq \boldsymbol{\lambda_3})}$$

Rešenje. Za matricu sistema:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

određujemo prvo karakteristični polinom u faktorisanom obliku:

$$\begin{aligned} P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}| &= \begin{vmatrix} (2-\boldsymbol{\lambda}) & -1 & 1 \\ 1 & (2-\boldsymbol{\lambda}) & -1 \\ 1 & -1 & (2-\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} \\ &= (2-\boldsymbol{\lambda})\,(2-\boldsymbol{\lambda})\,(2-\boldsymbol{\lambda}) + 1 - 1 \\ &- (2-\boldsymbol{\lambda}) - (2-\boldsymbol{\lambda}) + (2-\boldsymbol{\lambda}) \\ &= (2-\boldsymbol{\lambda})\left((2-\boldsymbol{\lambda})^2 - 1\right) \\ &= -\,(\boldsymbol{\lambda}-2)\left(\boldsymbol{\lambda}^2 - 4\boldsymbol{\lambda} + 3\right) \\ &= -\,(\boldsymbol{\lambda}-2)\,(\boldsymbol{\lambda}-1)\,(\boldsymbol{\lambda}-3)\,. \end{aligned}$$

Samim tim karakteristični polinom:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}| = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 6\boldsymbol{\lambda}^2 - 11\boldsymbol{\lambda} + 6 = -(\boldsymbol{\lambda}-1)(\boldsymbol{\lambda}-2)(\boldsymbol{\lambda}-3),$$

ima tri realna međusobno različita karakteristična korena:

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = 1, \boldsymbol{\lambda}_2 = 2, \boldsymbol{\lambda}_3 = 3.$$

1. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_1 = 1$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{aligned} (2-\boldsymbol{\lambda}_1)\,\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + (2-\boldsymbol{\lambda}_1)\,\beta - \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta + (2-\boldsymbol{\lambda}_1)\,\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta - \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

za koji tražimo netrivijalno rešenje

$$v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_1}$ svih rešenja sistema $(\mathcal{S}_0)$ jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. Upotrebom Gausovog algoritma imamo jedan izbor koordinata rešenja:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha-\beta+\gamma &=& 0, \\ \alpha+\beta-\gamma &=& 0, \\ \alpha-\beta+\gamma &=& 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha-\beta+\gamma &=& 0, \\ 2\beta-2\gamma &=& 0, \\ 0 &=& 0 \end{array}\right\} \implies \gamma=\beta=0 \,\wedge\, \alpha=0\,.$$

Jednostrukom karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_1=1$ pridružujemo *prvi karakteritični vektor*:

$$\vec{v}_1=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \end{array}\right]^T$$

i *vektorsku funkciju prvog rešenja*:

$$\vec{y}_1=\vec{v}_1\,e^{\boldsymbol{\lambda}_1 t}=\underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]}_{\vec{v}_1} e^t=\left[\begin{array}{c} 0 \\ e^t \\ e^t \end{array}\right].$$

2. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_2=2$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} (2-\boldsymbol{\lambda}_2)\,\alpha-\beta+\gamma &=& 0, \\ \alpha+(2-\boldsymbol{\lambda}_2)\,\beta-\gamma &=& 0, \\ \alpha-\beta+(2-\boldsymbol{\lambda}_2)\,\gamma &=& 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -\beta+\gamma &=& 0, \\ \alpha-\gamma &=& 0, \\ \alpha-\beta &=& 0 \end{array}\right\}$$

za koji tražimo netrivijalno rešenje

$$v=(\alpha,\beta,\gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_2}$ svih rešenja sistema $(\mathcal{S}_0)$ jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. Upotrebom Gausovog algoritma imamo jedan izbor koordinata rešenja:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\beta+\gamma &=& 0, \\ \alpha\quad\;\;-\gamma &=& 0, \\ \alpha-\beta\quad\;\; &=& 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha-\beta\quad\;\; &=& 0, \\ \alpha\quad\;\;-\gamma &=& 0, \\ -\beta+\gamma &=& 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha-\beta\quad\;\; &=& 0, \\ \beta-\gamma &=& 0, \\ -\beta+\gamma &=& 0 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha-\beta\quad\;\; &=& 0, \\ \beta-\gamma &=& 0, \\ 0 &=& 0 \end{array}\right\} \implies \gamma=\beta=\alpha=1.$$

Jednostrukom karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_2=2$ pridružujemo *drugi karakteritični vektor*:

$$\vec{v}_2=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right]^T$$

i *vektorsku funkciju prvog rešenja*:

$$\vec{y}_2=\vec{v}_2\,e^{\boldsymbol{\lambda}_2 t}=\underbrace{\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right]}_{\vec{v}_2} e^{2t}=\left[\begin{array}{c} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{array}\right].$$

3. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_3 = 3$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{aligned} (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\,\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\,\beta - \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta + (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\,\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} -\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta - \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta - \gamma &= 0 \end{aligned} \right\}$$

za koji tražimo netrivijalno rešenje

$$v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_3}$ svih rešenja sistema $(\mathcal{S}_0)$ jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. Upotrebom Gausovog algoritma imamo jedan izbor koordinata rešenja:

$$\left\{ \begin{aligned} -\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta - \gamma &= 0, \\ \alpha - \beta - \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} -\alpha - \beta + \gamma &= 0, \\ -2\beta &= 0, \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \beta = 0 \,\wedge\, \alpha = \gamma = 1.$$

Jednostrukom karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_3 = 3$ pridružujemo *treći karakteritični vektor*:

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

i *vektorsku funkciju trećeg rešenja*:

$$\vec{y}_3 = \vec{v}_3\, e^{\boldsymbol{\lambda}_3 t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^{3t} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Sveukupno, *opšte rešenje* polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= C_1\,\vec{y}_1 + C_2\,\vec{y}_2 + C_3\,\vec{y}_3 \\ &= C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

za ma koje realne konstante C_1, C_2, C_3 i parametar $t \in R$. □

$\boxed{(ii)\ \boldsymbol{\lambda}_1 \in \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{\lambda}_{2,3} \in \boldsymbol{C}:}$

Karakteristčni prostor V_{λ_1} je realan jednodimenzionalan i $V_{\lambda_{2,3}}$ su kompleksni jednodimenzionalani. Tada postoje bazni vektori iz razmatranih prostora:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_1}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \beta_{21} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} + \boldsymbol{i} \begin{bmatrix} \alpha_{22} \\ \beta_{22} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \in V_{\lambda_2}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \beta_{21} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} - \boldsymbol{i} \begin{bmatrix} \alpha_{22} \\ \beta_{22} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} \in V_{\lambda_3}.$$

Na osnovu ova tri vektora formiramo tri vektorske funkcije rešenja:

$$\vec{y}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \beta_1 e^{\lambda_1 t} \\ \gamma_1 e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_{2,3} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \beta_{21} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} \pm \boldsymbol{i} \begin{bmatrix} \alpha_{22} \\ \beta_{22} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix}}_{\vec{v}_{2,3}} \right) \underbrace{e^{at}\left(\cos bt \pm \boldsymbol{i} \sin bt\right)}_{e^{\lambda_{2,3} t}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} (p_{11}\cos bt + q_{11}\sin bt)e^{at} \\ (p_{21}\cos bt + q_{21}\sin bt)e^{at} \\ (p_{31}\cos bt + q_{31}\sin bt)e^{at} \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{y}}_2 = \mathrm{Re}(\vec{y}_2)} \pm \boldsymbol{i} \underbrace{\begin{bmatrix} (r_{11}\cos bt + s_{11}\sin bt)e^{at} \\ (r_{21}\cos bt + s_{21}\sin bt)e^{at} \\ (r_{31}\cos bt + s_{31}\sin bt)e^{at} \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{y}}_3 = \mathrm{Im}(\vec{y}_2)}.$$

Opšte rešenje je linearna kombinacija:

$$\vec{w} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{\tilde{y}}_2 + C_3\vec{\tilde{y}}_3 = \begin{bmatrix} C_1(\alpha_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2(p_{11}\cos bt + q_{11}\sin bt)e^{at} + C_3(r_{11}\cos bt + s_{11}\sin bt)e^{at} \\ C_1(\beta_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2(p_{21}\cos bt + q_{21}\sin bt)e^{at} + C_3(r_{21}\cos bt + s_{21}\sin bt)e^{at} \\ C_1(\gamma_1 e^{\lambda_1 t}) + C_2(p_{31}\cos bt + q_{31}\sin bt)e^{at} + C_3(r_{31}\cos bt + s_{31}\sin bt)e^{at} \end{bmatrix},$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, C_2, C_3 \in R$ i parametar $t \in R$.

Zadatak 2. *Rešiti homogeni linearni sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:*

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - 2z, \\ y' &= -x, \\ z' &= x + y - z. \end{aligned}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{\lambda_1} \in \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{\lambda_{2,3}} \in \boldsymbol{C})}$$

Rešenje. Za matricu sistema:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

određujemo prvo karakteristični polinom:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}| = \begin{vmatrix} (2-\boldsymbol{\lambda}) & 1 & -2 \\ -1 & (0-\boldsymbol{\lambda}) & 0 \\ 1 & 1 & (-1-\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \Big((2-\boldsymbol{\lambda})(-\boldsymbol{\lambda})(-1-\boldsymbol{\lambda}) + 0 + 2 \Big) + \Big(-2\boldsymbol{\lambda} - 0 - (1+\boldsymbol{\lambda}) \Big) \\ &= -\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\lambda}-2)(\boldsymbol{\lambda}+1) + 2 - 2\boldsymbol{\lambda} - (1+\boldsymbol{\lambda}) = -\left(\boldsymbol{\lambda}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}\right)(\boldsymbol{\lambda}+1) + 1 - 3\boldsymbol{\lambda} \\ &= -\left(\boldsymbol{\lambda}^3 + \boldsymbol{\lambda}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}^2 - 2\boldsymbol{\lambda}\right) + 1 - 3\boldsymbol{\lambda} = -\left(\boldsymbol{\lambda}^3 + \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} + 1\right) + 1 - 3\boldsymbol{\lambda} \\ &= -\boldsymbol{\lambda}^3 + \boldsymbol{\lambda}^2 + 2\boldsymbol{\lambda} + 1 - 3\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\lambda}^3 + \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} + 1. \end{aligned}$$

Prema teoremi o celobrojnim nulama (polinoma sa celobrojnim koeficijentima) karakteristični polinom $P_3(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^3 + \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} + 1$ ima potencijalne nule u skupu delilaca slobodnog člana 1, tj. potencijalne celobrojne nule su ± 1. Proverom

$$P_3(1) = -1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 0$$

nalazimo jedan koren

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = 1.$$

Deljenjem $P_3(\boldsymbol{\lambda})$ sa $\boldsymbol{\lambda} - 1$ dobijamo kvadratni trinom $-\boldsymbol{\lambda}^2 - 1$ čiji su koreni

$$\boldsymbol{\lambda}_{2,3} = \pm \boldsymbol{i}.$$

U prethodnom postupku izvršena je i realna faktorizacija $P_3(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^3 + \boldsymbol{\lambda}^2 - \boldsymbol{\lambda} + 1 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)\left(\boldsymbol{\lambda}^2 + 1\right)$.

1. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_1 = 1$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} (2-\boldsymbol{\lambda}_1)\alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ -\alpha - \boldsymbol{\lambda}_1\beta & = & 0, \\ \alpha + \beta - (1+\boldsymbol{\lambda}_1)\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ -\alpha - \beta & = & 0, \\ \alpha + \beta - 2\gamma & = & 0. \end{array}\right\}$$

za koji tražimo netrivijalno rešenje

$$v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_1}$ svih rešenja sistema $(\mathcal{S}_0)$ jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. Upotrebom Gausovog algoritma imamo jedan izbor koordinata rešenja:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ -\alpha - \beta & = & 0, \\ \alpha + \beta - 2\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ -2\gamma & = & 0, \\ 0 & = & 0 \end{array}\right\} \implies \gamma = 0 \,\wedge\, \alpha = 1,\, \beta = -1.$$

Jednostrukom karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_1 = 1$ pridružujemo *prvi karakteritični vektor*:

$$\vec{v}_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \end{array}\right]^T$$

i *vektorsku funkciju prvog rešenja*:

$$\vec{y}_1 = \vec{v}_1\, e^{\boldsymbol{\lambda}_1 t} = \underbrace{\left[\begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right]}_{\vec{v}_1} e^t = \left[\begin{array}{r} e^t \\ -e^t \\ 0 \end{array}\right].$$

2, 3. Za karakteristične korene $\boldsymbol{\lambda}_{2,3} = \pm \boldsymbol{i}$ razmotrimo samo slučaj jednog karakterističnog korena $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{i}$ i njegovog odgovarajućeg karakterističng sistema:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{\begin{array}{rcl} (2-\boldsymbol{\lambda}_2)\alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ -\alpha - \boldsymbol{\lambda}_2\beta & = & 0, \\ \alpha + \beta - (1+\boldsymbol{\lambda}_2)\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{lrcl} (1) & (2-\boldsymbol{i})\alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ (2) & -\alpha - \boldsymbol{i}\beta & = & 0, \\ (3) & \alpha + \beta - (1+\boldsymbol{i})\gamma & = & 0 \end{array}\right\}$$

za koji tražimo netrivijalno kompleksno rešenje

$$v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_2}$ svih rešenja sistema $(\mathcal{S}_0)$ jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. U ovom primeru možemo i bez transformacije sistema Gausovim algoritmom birati:

$$\begin{aligned} \beta = 1 \quad &\underset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \alpha = -\boldsymbol{i}\,\beta = -\boldsymbol{i}, \\ &\underset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}\left((2-\boldsymbol{i})\alpha + \beta\right) = \frac{1}{2}\left((2-\boldsymbol{i})(-\boldsymbol{i}) + 1\right) = \frac{1}{2}\left(-2\boldsymbol{i} - 1 + 1\right) = -\boldsymbol{i} \end{aligned}$$

$\big($do iste vrednosti za γ se dolazi i upotrebom (3)$\big)$. Napomenimo da inicijalni izbor $\beta = 0$ nije adekvatan, jer dovodi do $\alpha = \gamma = 0$, tj. dovodi do trivijalnog rešenja sistema. Na osnovu prethodnog razmatranja jednostrukom kompleksnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{i}$ pridružujemo kompleksnu vektorsku funkciju rešenja:

$$\begin{aligned} \vec{y}_2 &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{i} \\ 1 \\ -\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \cdot e^{\boldsymbol{i}t} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{i} \\ 1 \\ -\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \cdot (\cos t + \boldsymbol{i}\sin t) \\ &= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{i}\cdot(\cos t + \boldsymbol{i}\sin t) \\ 1\cdot(\cos t + \boldsymbol{i}\sin t) \\ -\boldsymbol{i}\cdot(\cos t + \boldsymbol{i}\sin t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t - \boldsymbol{i}\cos t \\ \cos t + \boldsymbol{i}\sin t \\ \sin t - \boldsymbol{i}\cos t \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{y}}_2 = \mathrm{Re}(\vec{y}_2)} + \boldsymbol{i} \underbrace{\begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}}_{\vec{\tilde{y}}_3 = \mathrm{Im}(\vec{y}_2)} = \vec{\tilde{y}}_2 + \boldsymbol{i}\,\vec{\tilde{y}}_3. \end{aligned}$$

Koristeći Teoremu 3.3 jednostrukom kompleksnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{i}$ pridružujemo *vektorsku funkciju drugog i trećeg rešenja*:

$$\vec{\tilde{y}}_2 = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \vec{\tilde{y}}_3 = \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

Sveukupno, *opšte rešenje* polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= C_1\,\vec{y}_1 + C_2\,\vec{\tilde{y}}_2 + C_3\,\vec{\tilde{y}}_3 \\ &= C_1 \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,e^t + C_2\sin t - C_3\cos t \\ -C_1\,e^t + C_2\cos t + C_3\sin t \\ C_2\sin t - C_3\cos t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

za ma koje realne konstante C_1, C_2, C_3 i parametar $t \in R$. $\square$

<u>**Napomena**</u> *Razmotrimo i dodatno slučaj konjugovanog karakterističnog korena* $\boldsymbol{\lambda}_3 = -\boldsymbol{i}$ *i njegovog odgovarajućeg karakterističng sistema:*

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ -\alpha - \boldsymbol{\lambda}_3\beta & = & 0, \\ \alpha + \beta - (1+\boldsymbol{\lambda}_3)\gamma & = & 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lrcl} (1) & (2+\boldsymbol{i})\alpha + \beta - 2\gamma & = & 0, \\ (2) & -\alpha + \boldsymbol{i}\beta & = & 0, \\ (3) & \alpha + \beta - (1-\boldsymbol{i})\gamma & = & 0 \end{array} \right\}$$

za koji tražimo netrivijalno kompleksno rešenje

$$v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_2}$ *svih rešenja sistema* $(\mathcal{S}_0)$ *jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. U ovom primeru možemo i bez transformacije sistema Gausovim algoritmom birati:*

$$\beta = 1 \quad \underset{(2)}{\Longrightarrow} \quad \alpha = \boldsymbol{i}\,\beta = \boldsymbol{i},$$

$$\underset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}\,((2+\boldsymbol{i})\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\,((2+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{i}) + 1) = \frac{1}{2}\,(2\boldsymbol{i} - 1 + 1) = \boldsymbol{i}$$

$\big($*do iste vrednosti za* γ *se dolazi i upotrebom* (3)$\big)$. *Napomenimo da inicijalni izbor* $\beta = 0$ *nije adekvatan, jer dovodi do* $\alpha = \gamma = 0$, *tj. dovodi do trivijalnog rešenja sistema. Na osnovu prethodnog razmatranja jednostrukom kompleksnom korenu* $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{i}$ *pridružujemo kompleksnu vektorsku funkciju rešenja:*

$$\begin{aligned} \vec{y}_3^{\,*} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ 1 \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \cdot e^{-\boldsymbol{i}t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \\ 1 \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix} \cdot (\cos t - \boldsymbol{i}\sin t) \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}\cdot(\cos t - \boldsymbol{i}\sin t) \\ 1\cdot(\cos t - \boldsymbol{i}\sin t) \\ \boldsymbol{i}\cdot(\cos t - \boldsymbol{i}\sin t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t + \boldsymbol{i}\cos t \\ \cos t - \boldsymbol{i}\sin t \\ \sin t + \boldsymbol{i}\cos t \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}}_{\vec{\mathrm{y}}_2^{\,*} = \mathrm{Re}(\vec{y}_3)} + \boldsymbol{i} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}}_{\vec{\mathrm{y}}_3^{\,*} = \mathrm{Im}(\vec{y}_3)} = \vec{\mathrm{y}}_2 + \boldsymbol{i}\,\vec{\mathrm{y}}_3. \end{aligned}$$

Novoformirane objekte markirajmo sa $*$. *Koristeći Teoremu* 3.3 *jednostrukom kompleksnom korenu* $\boldsymbol{\lambda}_3 = -\boldsymbol{i}$ *pridružujemo* vektorsku funkciju drugog i trećeg rešenja:

$$\vec{\mathrm{y}}_2^{\,*} = \vec{\mathrm{y}}_2 = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathrm{y}}_3^{\,*} = -\vec{\mathrm{y}}_3 = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Sveukupno, <u>opšte rešenje</u> *polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:*

$$\vec{w} = C_1\,\vec{y}_1 + C_2^*\,\vec{\mathrm{y}}_2^{\,*} + C_3^*\,\vec{\mathrm{y}}_3^{\,*}$$

za ma koje realne konstante C_1, $C_2^* = C_2$ *i* $C_3^* = -C_3$. *Prethodno razmatranje potvrđuje da se sa konjugovano kompleksnim korenom* $\boldsymbol{\lambda}_3 = -\boldsymbol{i}$ *ne dobijaju nova rešenja.* □

$\boxed{\boldsymbol{(iii)\ \lambda_{1,2,3} \in R \wedge \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \wedge \dim(V_{\lambda_{1,2}}) = 1:}}$

Karakteristčni prostor $V_{\lambda_{1,2}}$ je realani jednodimenzionalani i V_{λ_3} je realani jednodimenzionalani. Tada postoje bazni vektori iz razmatranih prostora:

$$\vec{v}_1 = \vec{\hat{v}}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_{1,2}}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_3}.$$

Određujemo još uopšteni karakteristični vektor:

$$\vec{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

koje je rešenje linearnog sistema:

$$(\mathsf{A} - \lambda_{1,2}\mathrm{I})\,\vec{\hat{v}}_2 = \vec{\hat{v}}_1.$$

Na osnovu ova tri vektora formiramo tri linearno nezavisne vektorske funkcije rešenja:

$$\vec{\hat{y}}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_{1,2}t} \\ \beta_1 e^{\lambda_{1,2}t} \\ \gamma_1 e^{\lambda_{1,2}t} \end{bmatrix},$$

$$\vec{\hat{y}}_2 = \left(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1 t\right) e^{\lambda_{1,2}t} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} t \right) e^{\lambda_{1,2}t} = \begin{bmatrix} (\alpha_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda_{1,2}t} \\ (\beta_2 + \beta_1 t)e^{\lambda_{1,2}t} \\ (\gamma_2 + \gamma_1 t)e^{\lambda_{1,2}t} \end{bmatrix},$$

$$\vec{y}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} \alpha_3 e^{\lambda_3 t} \\ \beta_3 e^{\lambda_3 t} \\ \gamma_3 e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje je linearna kombinacija:

$$\vec{w} = C_1\vec{\hat{y}}_1 + C_2\vec{\hat{y}}_2 + C_3\vec{y}_3 = \begin{bmatrix} C_1(\alpha_1 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_2((\alpha_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda_{1,2}t}) + C_3(\alpha_3 e^{\lambda_3 t}) \\ C_1(\beta_1 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_2((\beta_2 + \beta_1 t)e^{\lambda_{1,2}t}) + C_3(\beta_3 e^{\lambda_3 t}) \\ C_1(\gamma_1 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_2((\gamma_2 + \gamma_1 t)e^{\lambda_{1,2}t}) + C_3(\gamma_3 e^{\lambda_3 t}) \end{bmatrix},$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, C_2, C_3 \in R$ i parametar $t \in R$.

<u>**Zadatak 3.**</u> *Rešiti homogeni linearni sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:*

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z, \\ y' &= x + y - z, \\ z' &= \quad -y + 2z. \end{aligned}$$

$\boxed{\boldsymbol{(\lambda_{1,2,3} \in R \wedge \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \wedge \dim(V_{\lambda_{1,2}}) = 1)}}$

Rešenje. Za matricu sistema:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

određujemo prvo karakteristični polinom:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}| = \begin{vmatrix} (1-\boldsymbol{\lambda}) & -1 & 1 \\ 1 & (1-\boldsymbol{\lambda}) & -1 \\ 0 & -1 & (2-\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = \ldots = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 4\boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 2.$$

Važi:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 4\boldsymbol{\lambda}^2 - 5\boldsymbol{\lambda} + 2 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(\boldsymbol{\lambda} - 2),$$

odakle postoje tri realna karakteristična korena:

$$\boldsymbol{\lambda}_{1,2} = 1, \boldsymbol{\lambda}_3 = 2.$$

1,2. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_{1,2} = 1$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2})\alpha - \beta + \gamma & = & 0, \\ \alpha + (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2})\beta - \gamma & = & 0, \\ -\beta + (2-\boldsymbol{\lambda}_{1,2})\gamma & = & 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -\beta + \gamma & = & 0, \\ \alpha \qquad - \gamma & = & 0, \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right\}$$

koji transformišemo Gauovim algoritmom u ekvivalentan linearni sistem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\beta + \gamma & = & 0, \\ \alpha \qquad - \gamma & = & 0, \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha \qquad - \gamma & = & 0, \\ -\beta + \gamma & = & 0, \\ 0 & = & 0. \end{array} \right\}$$

Opšte rešenje ovog linearnog sistema je

$$v = (\alpha, \beta, \gamma) = (t, t, t),$$

za $t \in R$. Samim tim karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2}}$ je jednodimenzionalan i određen je sa:

$$V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2}} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in R \right\}.$$

Primetimo da je vektor

$$\vec{\hat{v}}_1 = \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

jedan vektor iz jezgra matrice $\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2}\mathrm{I}$ i svi ostali vektori iz jezgra te matrice su kolinearni sa njim. *Prvo rešenje* polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{y}_1 = \vec{\hat{v}}_1 \, e^{\lambda_{1,2}t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} e^t = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Partikularno rešenje, koje je linearno nezavisno od prethodnog rešenja, određujemo u obliku:

$$\vec{\hat{y}}_2 = \left(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1\, t\right) e^{\boldsymbol{\lambda}_{1,2}\, t},$$

za vektor $\vec{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$ koji je rešenje nehomogenog linearnog sistema:

$$(\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2}\mathrm{I})\, \vec{\hat{v}}_2 = \vec{\hat{v}}_1.$$

Konkretno rešavajući sistem:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1}$$

Gausovim algoritmom

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\beta + \gamma & = & 1 \\ \alpha \quad - \gamma & = & 1 \\ -\beta + \gamma & = & 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha \quad - \gamma & = & 1 \\ -\beta + \gamma & = & 1 \\ -\beta + \gamma & = & 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha \quad - \gamma & = & 1 \\ -\beta + \gamma & = & 1 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right\},$$

<u>izborom $\gamma = 0$</u>, tj.:

$$\gamma = 0,\ \beta = -1,\ \alpha = 1.$$

nalazimo jedno rešenje nehomogenog lienarnosg sistema

$$v = (1, -1, 0).$$

Samim tim, takvim izborom, vektor $\vec{\hat{v}}_2$ je dat u obliku:

$$\vec{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Drugo rešenje polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{\hat{y}}_2 = \left(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1\, t\right) e^{\lambda_{1,2} t} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} t \right) e^t = \begin{bmatrix} (1+t)\, e^t \\ (-1+t)\, e^t \\ t\, e^t \end{bmatrix}.$$

3. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_3 = 2$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (1-\boldsymbol{\lambda}_3)\alpha - \beta + \gamma & = & 0, \\ \alpha + (1-\boldsymbol{\lambda}_3)\beta - \gamma & = & 0, \\ -\beta + (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\gamma & = & 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -\alpha - \beta + \gamma & = & 0, \\ \alpha - \beta - \gamma & = & 0, \\ -\beta & = & 0 \end{array} \right\}$$

za koji tražimo netrivijalno rešenje

$$v=(\alpha,\beta,\gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_3}$ svih rešenja sistema $(\mathcal{S}_0)$ jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. Upotrebom Gausovog algoritma imamo jedan izbor koordinata rešenja:

$$\left\{\begin{array}{rcl}-\alpha-\beta+\gamma&=&0,\\ \alpha-\beta-\gamma&=&0,\\ -\beta&=&0\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{rcl}-\alpha-\beta+\gamma&=&0,\\ -2\beta&=&0,\\ -\beta&=&0\end{array}\right\}\implies\beta=0\,\wedge\,\alpha=\gamma=1.$$

Jednostrukom karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_3=2$ pridružujemo *karakteritični vektor*:

$$\vec{v}_3=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}^T.$$

Treće rešenje polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{y}_3=\vec{v}_3\,e^{\boldsymbol{\lambda}_3 t}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{\vec{v}_3}e^{3t}=\begin{bmatrix}e^{3t}\\0\\e^{3t}\end{bmatrix}.$$

Sveukupno, <u>*opšte rešenje*</u> polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\begin{aligned}\vec{w}&=C_1\,\vec{\hat{y}}_1+C_2\,\vec{\hat{y}}_2+C_3\,\vec{y}_3\\&=C_1\begin{bmatrix}e^t\\e^t\\e^t\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}(1+t)\,e^t\\(-1+t)\,e^t\\t\,e^t\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}e^{2t}\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\,e^t+C_2(1+t)\,e^t+C_3e^{2t}\\C_1\,e^t+C_2(-1+t)\,e^t\\C_1\,e^t+C_2\,t\,e^t+C_3e^{2t}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

za ma koje realne konstante C_1, C_2, C_3 i parametar $t\in R$. □

$\boxed{\textbf{(iv)}\ \boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\in \boldsymbol{R}\wedge\boldsymbol{\lambda}_1=\boldsymbol{\lambda}_2\neq\boldsymbol{\lambda}_3\wedge\dim(\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2}})=\mathbf{2}:}$

Karakteristčni prostor $V_{\lambda_{1,2}}$ je realani dvodimenzionalani i karaktristični prostor V_{λ_3} je realani jednodimenzionalani. Tada postoje bazni vektori iz razmatranih prostora:

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{bmatrix}\in V_{\lambda_{1,2}},\quad\vec{v}_2=\begin{bmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{bmatrix}\in V_{\lambda_{1,2}},\quad\vec{v}_3\begin{bmatrix}\alpha_3\\\beta_3\\\gamma_3\end{bmatrix}\in V_{\lambda_3}.$$

Na osnovu ova tri vektora formiramo tri linearno nezavisne vektorske funkcije rešenja:

$$\vec{y}_1=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}e^{\lambda_1 t}=\begin{bmatrix}\alpha_1e^{\lambda_{1,2}t}\\\beta_1e^{\lambda_{1,2}t}\\\gamma_1e^{\lambda_{1,2}t}\end{bmatrix},\quad\vec{y}_2=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}e^{\lambda_{1,2}t}=\begin{bmatrix}\alpha_2e^{\lambda_{1,2}t}\\\beta_2e^{\lambda_{1,2}t}\\\gamma_2e^{\lambda_{1,2}t}\end{bmatrix},\quad\vec{y}_3=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_3\\\beta_3\\\gamma_3\end{bmatrix}}_{\vec{v}_3}e^{\lambda_3 t}=\begin{bmatrix}\alpha_3e^{\lambda_3 t}\\\beta_3e^{\lambda_3 t}\\\gamma_3e^{\lambda_3 t}\end{bmatrix};$$

gde su $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_{\lambda_{1,2}}, \vec{v}_3 \in V_{\lambda_3}$ netrivijalni vektori iz razmatranih prostora. Opšte rešenje je linearna kombinacija:

$$\vec{w} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 + C_3\vec{y}_3 = \begin{bmatrix} C_1(\alpha_1 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_2(\alpha_2 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_3(\alpha_3 e^{\lambda_3 t}) \\ C_1(\beta_1 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_2(\beta_2 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_3(\beta_3 e^{\lambda_3 t}) \\ C_1(\gamma_1 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_2(\gamma_2 e^{\lambda_{1,2}t}) + C_3(\gamma_3 e^{\lambda_3 t}) \end{bmatrix},$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, C_2, C_3 \in R$ i parametar $t \in R$.

<u>**Zadatak 4.**</u> *Rešiti homogeni linearni sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:*

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y + z, \\ y' &= x + 2y + z, \\ z' &= x + y + 2z. \end{aligned}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \wedge \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \wedge \mathbf{dim}(V_{\lambda_{1,2}}) = 2})}$$

<u>**Rešenje.**</u> Za matricu sistema:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

određujemo prvo karakteristični polinom:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}| = \begin{vmatrix} (2-\boldsymbol{\lambda}) & 1 & 1 \\ 1 & (2-\boldsymbol{\lambda}) & 1 \\ 1 & 1 & (2-\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = \ldots = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 6\boldsymbol{\lambda}^2 - 9\boldsymbol{\lambda} + 4.$$

Važi:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 6\boldsymbol{\lambda}^2 - 9\boldsymbol{\lambda} + 4 = -(\boldsymbol{\lambda} - 1)^2(\boldsymbol{\lambda} - 4),$$

odakle postoje tri realna karakteristična korena:

$$\boldsymbol{\lambda}_{1,2} = 1, \boldsymbol{\lambda}_3 = 4.$$

1,2. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_{1,2} = 1$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \quad \left\{ \begin{aligned} (2-\boldsymbol{\lambda}_{1,2})\alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + (2-\boldsymbol{\lambda}_{1,2})\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta + (2-\boldsymbol{\lambda}_{1,2})\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \iff \{\, \alpha + \beta + \gamma = 0 \,\}.$$

Opšte rešenje ovog linearnog sistema je

$$v = (\alpha, \beta, \gamma) = (p, q, -p-q),$$

za $p, q \in R$. Karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2}}$ je <u>dvodimenzionalan</u> i određen sa:

$$V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2}} = \left\{ p \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + q \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} \;:\; p, q \in R \right\}.$$

Karakteristični vektori

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

su iz jezgra matrice $\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2}\mathrm{I}$ i svi ostali vektori iz jezgra te matrice su linearne kombinacije ta dva bazna karakteristična vektora. *Prvo rešenje* polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{y}_1 = \vec{\hat{v}}_1 \, e^{\lambda_{1,2}t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} e^t = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

Drugo rešenje polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{y}_2 = \vec{\hat{v}}_2 \, e^{\lambda_{1,2}t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

3. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_3 = 4$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\alpha + \beta + \gamma &=& 0, \\ \alpha + (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\beta + \gamma &=& 0, \\ \alpha + \beta + (2-\boldsymbol{\lambda}_3)\gamma &=& 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\alpha + \beta + \gamma &=& 0, \\ \alpha - 2\beta + \gamma &=& 0, \\ \alpha + \beta - 2\gamma &=& 0. \end{array} \right\}$$

za koji tražimo netrivijalno rešenje

$$v = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Budući da je karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_3}$ svih rešenja sistema $(\mathcal{S}_0)$ jednodimenzionalan, tada sva rešenja ovog sistema su kolinearna sa jednim netrivijalnim rešenjem. Upotrebom Gausovog algoritma imamo jedan izbor koordinata rešenja:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2\alpha + \beta + \gamma &=& 0, \\ \alpha - 2\beta + \gamma &=& 0, \\ \alpha + \beta - 2\gamma &=& 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta - 2\gamma &=& 0, \\ \alpha - 2\beta + \gamma &=& 0, \\ -2\alpha + \beta + \gamma &=& 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta - 2\gamma &=& 0, \\ -3\beta + 3\gamma &=& 0, \\ 3\beta - 3\gamma &=& 0 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta - 2\gamma &=& 0, \\ -\beta + \gamma &=& 0, \\ 0 &=& 0 \end{array} \right\} \implies \gamma = \beta = \alpha = 1.$$

Jednostrukom karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_3 = 4$ pridružujemo *karakteritični vektor*:

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Treće rešenje polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{y}_3 = \vec{v}_3 \, e^{\boldsymbol{\lambda}_3 t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^{4t} = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Sveukupno, <u>*opšte rešenje*</u> polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= C_1\,\vec{y}_1 + C_2\,\vec{y}_2 + C_3\,\vec{y}_3\\ &= C_1\begin{bmatrix} e^t\\ 0\\ -e^t\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 0\\ e^t\\ -e^t\end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} e^{4t}\\ e^{4t}\\ e^{4t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\,e^t + C_3e^{4t}\\ C_2\,e^t + C_3e^{4t}\\ -C_1\,e^t - C_2\,e^t + C_3e^{4t}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

za ma koje realne konstante C_1, C_2, C_3 i parametar $t\in R$. □

$\boxed{\textbf{(v)}\ \boldsymbol{\lambda_{1,2,3}\in R\wedge\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\wedge}\ \mathbf{dim}\boldsymbol{(V_{\lambda_{1,2,3}})=1:}}$

Karakteristčni prostor $V_{\lambda_{1,2,3}}$ je realani jednodimenzionalani. Tada postoji bazni vektor iz razmatranog prostora:

$$\vec{\hat{v}}_1 = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix} \in V_{\lambda_{1,2,3}},$$

Prvi nedostajući vektor $\vec{\hat{v}}_2$ određujemo kao vektor:

$$\vec{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{bmatrix}$$

koje je rešenje linearnog sistema:

$$(\mathsf{A}-\lambda_{1,2,3}\mathrm{I})\,\vec{\hat{v}}_2 = \vec{\hat{v}}_1.$$

Drugi nedostajući vektor $\vec{\hat{v}}_3$ određujemo kao vektor:

$$\vec{\hat{v}}_3 = \begin{bmatrix}\alpha_3\\ \beta_3\\ \gamma_3\end{bmatrix}$$

koje je rešenje linearnog sistema:

$$(\mathsf{A}-\lambda_{1,2,3}\mathrm{I})\,\vec{\hat{v}}_3 = \vec{\hat{v}}_2.$$

Na osnovu ova tri vektora formiramo tri linearno nezavisne vektorske funkcije rešenja:

$$\vec{\hat{y}}_1 = \vec{\hat{v}}_1\,e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix}\alpha_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\\ \beta_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\\ \gamma_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\end{bmatrix},$$

$$\vec{\hat{y}}_2 = \Big(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1 t\Big)\,e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} t\right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix}(\alpha_2+\alpha_1 t)e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\\ (\beta_2+\beta_1 t)e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\\ (\gamma_2+\gamma_1 t)e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\end{bmatrix},$$

$$\vec{\hat{y}}_3 = \left(\vec{\hat{v}}_3 + \vec{\hat{v}}_2 t + \vec{\hat{v}}_1 \frac{t^2}{2}\right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_3\\ \beta_3\\ \gamma_3\end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_3} + \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ \gamma_2\end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} t + \underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} \frac{t^2}{2}\right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix}\left(\alpha_3 + \alpha_2 t + \alpha_1 \frac{t^2}{2}\right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\\ \left(\beta_3 + \beta_2 t + \beta_1 \frac{t^2}{2}\right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\\ \left(\gamma_3 + \gamma_2 t + \gamma_1 \frac{t^2}{2}\right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t}\end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje je linearna kombinacija:

$$\vec{w} = C_1\vec{\hat{y}}_1 + C_2\vec{\hat{y}}_2 + C_3\vec{\hat{y}}_3\,,$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, C_2, C_3 \in R$ i parametar $t \in R$.

Zadatak 5. *Rešiti homogeni linearni sistem diferencijalnih jedenačina sa konstantnim koeficijentima:*

$$\begin{aligned} x' &= 4x - y,\\ y' &= 3x + y - z,\\ z' &= x \qquad\;\; + z. \end{aligned}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} \in \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{\lambda}_1 = \boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_3 \wedge \dim(V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}}) = 1)}$$

Rešenje. Za matricu sistema:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

određujemo prvo karakteristični polinom:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathsf{I}| = \begin{vmatrix} (4-\boldsymbol{\lambda}) & -1 & 0\\ 3 & (1-\boldsymbol{\lambda}) & -1\\ 1 & 0 & (1-\boldsymbol{\lambda})\end{vmatrix} = \ldots = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 6\boldsymbol{\lambda}^2 - 12\boldsymbol{\lambda} + 8.$$

Važi:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 6\boldsymbol{\lambda}^2 - 12\boldsymbol{\lambda} + 8, = -(\boldsymbol{\lambda} - 2)^3,$$

odakle postoje tri realna karakteristična korena:

$$\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} = 2.$$

1,2,3. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} = 2$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{\begin{array}{l} (4-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\,\alpha - \beta = 0,\\ 3\alpha + (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\,\beta - \gamma = 0,\\ \alpha + (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\,\gamma = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 2\alpha - \beta = 0,\\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0,\\ \alpha - \gamma = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha - \gamma = 0,\\ 2\alpha - \beta = 0,\\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha - \gamma = 0,\\ -\beta + 2\gamma = 0,\\ -\beta + 2\gamma = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha - \gamma = 0,\\ -\beta + 2\gamma = 0,\\ 0 = 0. \end{array}\right\}$$

Opšte rešenje ovog linearnog sistema je

$$v = (\alpha, \beta, \gamma) = (t, 2t, t),$$

za $t \in R$. Karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}}$ je jednodimenzionalan i određen sa:

$$V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}} = \left\{ t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} : t \in R \right\}.$$

Primetimo da je vektor $\vec{\hat{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ jedan vektor iz jezgra matrice $\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\mathrm{I}$ i svi ostali vektori iz jezgra te matrice su kolinearni sa njim. *Prvo rešenje* polaznog sistema je dato u obliku realne vektorske funkcije:

$$\vec{\hat{y}}_1 = \vec{\hat{v}}_1 \, e^{\lambda_{1,2,3}\, t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} e^{2t} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Drugo rešenje polaznog sistema je dato u obliku realne vektorske funkcije:

$$\vec{\hat{y}}_2 = \Big(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1 \, t \Big) \, e^{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\, t},$$

za vektor $\vec{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$ koji je rešenje nehomogenog linearnog sistema:

$$(\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\mathrm{I})\, \vec{\hat{v}}_2 = \vec{\hat{v}}_1.$$

Konkretno rešavajući sistem:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1}$$

Gausovim algoritmom

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha - \beta \phantom{{}-\gamma} & = & 1 \\ 3\alpha - \beta - \gamma & = & 2 \\ \alpha \phantom{{}-\beta} - \gamma & = & 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha \phantom{{}-\beta} - \gamma & = & 1 \\ 2\alpha - \beta \phantom{{}-\gamma} & = & 1 \\ 3\alpha - \beta - \gamma & = & 2 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha \phantom{{}-\beta} - \gamma & = & 1 \\ -\beta + 2\gamma & = & -1 \\ -\beta + 2\gamma & = & -1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha \phantom{{}-\beta} - \gamma & = & 1 \\ -\beta + 2\gamma & = & -1 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right\},$$

izborom $\gamma = 0$, tj.:

$$\gamma = 0, \; \beta = 1, \; \alpha = 1.$$

nalazimo jedno rešenje nehomogenog linenarnosg sistema

$$v = (1, 1, 0).$$

Samim tim, takvim izborom, vektor $\vec{\hat{v}}_2$ je dat u obliku:

$$\vec{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i drugo rešenje polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{\hat{y}}_2 = \left(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1\, t\right) e^{\lambda_{1,2,3}\, t} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} t \right) e^{2t} = \begin{bmatrix} (1+t)\, e^{2t} \\ (1+2\,t)\, e^{2t} \\ t\, e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Treće rešenje, koje je linearno nezaivsno od prethodna dva rešenja, određujemo u obliku:

$$\vec{\hat{y}}_3 = \left(\vec{\hat{v}}_3 + \vec{\hat{v}}_2\, t + \frac{1}{2}\, \vec{\hat{v}}_1\, t^2\right) e^{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\, t}$$

za vektor $\vec{\hat{v}}_3 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$ koji je rešenje nehomogenog linearnog sistema:

$$(\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\mathrm{I})\, \vec{\hat{v}}_3 = \vec{\hat{v}}_2.$$

Konkretno rešavajući sistem:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2}$$

Gausovim algoritmom

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2\alpha - \beta \qquad & = 1 \\ 3\alpha - \beta - \gamma & = 1 \\ \alpha \qquad - \gamma & = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rl} \alpha \qquad - \gamma & = 0 \\ 2\alpha - \beta \qquad & = 1 \\ 3\alpha - \beta - \gamma & = 1 \end{array} \right\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rl} \alpha \qquad - \gamma & = 0 \\ -\beta + 2\gamma & = 1 \\ -\beta + 2\gamma & = 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rl} \alpha \qquad - \gamma & = 0 \\ -\beta + 2\gamma & = 1 \\ 0 & = 0 \end{array} \right\},$$

<u>izborom $\gamma = 0$</u>, tj.:

$$\gamma = 0,\ \beta = -1,\ \alpha = 0.$$

nalazimo jedno rešenje nehomogenog linenarnosg sistema

$$v = (0, -1, 0).$$

Samim tim, takvim izborom, vektor $\hat{\vec{v}}_3$ je dat u obliku:

$$\hat{\vec{v}}_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i treće rešenje polaznog sistema je dato u obliku:

$$\begin{aligned} \vec{y}_3 &= \left(\hat{\vec{v}}_3 + \hat{\vec{v}}_2\, t + \frac{1}{2}\,\hat{\vec{v}}_1\, t^2\right) e^{\lambda_{1,2,3}\, t} \\ &= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\vec{v}}_3} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\vec{v}}_2} t + \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\vec{v}}_1} t^2 \right) e^{2t} = \begin{bmatrix} \left(t + \frac{1}{2}\,t^2\right)\, e^{2t} \\ (-1 + t + t^2)\; e^{2t} \\ \frac{1}{2}\,t^2\, e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sveukupno, *opšte rešenje* polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= C_1\,\vec{y}_1 + C_2\,\vec{y}_2 + C_3\,\vec{y}_3 \\ &= \begin{bmatrix} C_1\, e^{2t} + C_2(1+t)\, e^{2t} + C_3\left(t + \frac{1}{2}t^2\right) e^{2t} \\ C_1\, 2\, e^{2t} + C_2(1 + 2\,t)\, e^{2t} + C_3\,(-1 + t + t^2)\, e^{2t} \\ C_1\, e^{2t} + C_2\, t\, e^{2t} + C_3\,\frac{1}{2}\, t^2\, e^{2t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

za ma koje realne konstante C_1, C_2, $C_3 \in R$ i parametar $t \in R$. □

$\boxed{(vi)\ \lambda_{1,2,3} \in R \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \wedge \dim(V_{\lambda_{1,2,3}}) = 2:}$

Karakteristčni prostor $V_{\lambda_{1,2,3}}$ *je realani dvodimenzionalani. Tada postoje bazni vektori iz razmatranog prostora:*

$$\vec{v}_1 = \hat{\vec{v}}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_{1,2,3}}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_{1,2,3}}.$$

Postoji adekvatan izbor vektora $\hat{\vec{v}}_1 \in V_{\lambda_{1,2,3}}$ *takav da za njega određujemo dodatni uopšteni karakteristični vektor:*

$$\hat{\vec{v}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix}$$

koji je rešenje linearnog sistema:

$$(\mathrm{A} - \lambda_{1,2}\mathrm{I})\, \hat{\vec{v}}_2 = \hat{\vec{v}}_1.$$

Na osnovu ova tri vektora formiramo tri linearno nezavisne vektorske funkcije rešenja:

$$\vec{y}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix} \alpha_1\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \beta_1\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \gamma_1\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \end{bmatrix},$$

$$\vec{\hat{y}}_2 = \left(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1 t\right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\gamma}_2 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} t \right) e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix} (\hat{\alpha}_2 + \alpha_1 t)\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ (\hat{\beta}_2 + \beta_1 t)\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ (\hat{\gamma}_2 + \gamma_1 t)\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \end{bmatrix},$$

$$\vec{y}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix} \alpha_3\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \beta_3\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \gamma_3\, e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje je linearna kombinacija:

$$\vec{w} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{\hat{y}}_2 + C_3\vec{y}_3 = \begin{bmatrix} C_1(\alpha_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_2((\hat{\alpha}_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_3(\alpha_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) \\ C_1(\beta_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_2((\hat{\beta}_2 + \beta_1 t)e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_3(\beta_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) \\ C_1(\gamma_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_2((\hat{\gamma}_2 + \gamma_1 t)e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_3(\gamma_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) \end{bmatrix},$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, C_2, C_3 \in R$ i parametar $t \in R$.

Zadatak 6. Rešiti homogeni linearni sistem diferencijalnih jedenačina sa konstantnim koeficijentima:

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= x + y + z, \\ z' &= \qquad\quad z. \end{aligned}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \wedge \dim(V_{\lambda_{1,2,3}}) = 2})}$$

Rešenje. Za matricu sistema:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

određujemo prvo karakteristični polinom:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}| = \begin{vmatrix} (1-\boldsymbol{\lambda}) & 0 & 0 \\ 1 & (1-\boldsymbol{\lambda}) & 1 \\ 0 & 0 & (1-\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{\lambda}-1)^3 = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 3\boldsymbol{\lambda}^2 - 3\boldsymbol{\lambda} + 1,$$

odakle postoje tri realna karakteristična korena:

$$\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} = 1.$$

1,2,3. Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} = 1$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{\begin{array}{rl} (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\alpha & = 0 \\ \alpha + (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\,\beta + \gamma & = 0 \\ (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\,\gamma & = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 0 & = 0, \\ \alpha+\gamma & = 0, \\ 0 & = 0. \end{array}\right\}$$

Opšte rešenje ovog linearnog sistema je

$$v = (\alpha, \beta, \gamma) = (q, p, -q) = q\,(1, 0, -1) + p\,(0, 1, 0)\,,$$

za $p, q \in R$. Karakteristični prostor $V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2}}$ je <u>dvodimenzionalan</u> i određen sa:

$$V_{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}} = \left\{ p \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + q \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} \; : \; p, q \in R \right\}.$$

Karakteristični vektori

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

su iz jezgra matrice $\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\mathrm{I}$ i svi ostali vektori iz jezgra te matrice su linearne kombinacije ta dva bazna karakteristična vektora. *Prvo rešenje* polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{y}_1 = \vec{v}_1\, e^{\lambda_{1,2,3}\, t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Drugo rešenje polaznog sistema je dato u obliku realne vektorske funkcije:

$$\vec{y}_2 = \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_1\, t\right) e^{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\, t},$$

za vektor $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$ koji je rešenje nehomogenog linearnog sistema:

$$(\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\mathrm{I})\,\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Konkretno rešavajući sistem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1}$$

koji je eksplicitno dat sa

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 & = 0, \\ \hat{\alpha} + \hat{\gamma} & = 1, \\ 0 & = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\, \hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 1 \,\right\}$$

jedno rešenje se nalazi pri izboru:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2},\ \hat{\beta} = 0,\ \hat{\gamma} = \frac{1}{2}.$$

Samim tim, takvim *adekvatnim izborom* za $\vec{\hat{v}}_1$, postoji drugi uopšteni vektor $\vec{\hat{v}}_2$ koji je dat sa:

$$\vec{\hat{v}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

i drugo rešenje polaznog sistema diferencijalnih jednačina je dato u obliku:

$$\vec{\hat{y}}_2 = \Big(\vec{\hat{v}}_2 + \vec{\hat{v}}_1\, t\Big)\, e^{\lambda_{1,2,3}\, t} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\hat{v}}_1} t\right) e^t = \begin{bmatrix} (1/2)\, e^t \\ t\, e^t \\ (1/2)\, e^t \end{bmatrix}.$$

Napomenimo da izbor $\vec{\hat{v}}_1$ sa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ *nije adekvatan izbor* u smislu da tada nije moguće odrediti $\vec{\hat{v}}_2$ iz nehomogenog linearnog sistema $(\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}_{1,2,3}\mathrm{I})\, \vec{\hat{v}}_2 = \vec{\hat{v}}_1$. Inače, može se pokazati da u jezgru karakteristične matrice $\mathsf{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}$ *uvek postoji adekvatan izbor među baznim karakterističnim vektorima*. *Treće rešenje*, koje je linearno nezaivsno od prethodna dva rešenja, određujemo u obliku:

$$\vec{y}_3 = \vec{v}_3\, e^{\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^t = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{bmatrix}.$$

Sveukupno, <u>*opšte rešenje*</u> polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= C_1\, \vec{y}_1 + C_2\, \vec{y}_2 + C_3\, \vec{y}_3 \\ &= C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} (1/2)\, e^t \\ t\, e^t \\ (1/2)\, e^t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2\, (1/2)\, e^t + C_3\, e^t \\ C_1\, e^t + \quad C_2\, t\, e^t \\ C_2\, (1/2)\, e^t - C_3\, e^t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

za ma koje realne konstante C_1, C_2, C_3 i parametar $t \in R$. □

$\boxed{\textbf{\textit{(vii)}}\ \boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \wedge \mathrm{dim}(V_{\lambda_{1,2,3}}) = 3:}}$

Karakteristčni prostor $V_{\lambda_{1,2,3}}$ je realani trodimenzionalani. Tada postoje bazni vektori iz razmatranih prostora:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_{1,2,3}}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_{1,2,3}}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \in V_{\lambda_{1,2,3}}.$$

Ti vektori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ su karaktritčni vektori. Na osnovu ta tri vektora formiramo tri linearno nezavisne vektorske funkcije rešenja:

$$\vec{y}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \beta_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \gamma_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \end{bmatrix}, \ \vec{y}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix} \alpha_2 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \beta_2 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \gamma_2 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \end{bmatrix}, \ \vec{y}_3 = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^{\lambda_{1,2,3}\,t} = \begin{bmatrix} \alpha_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \beta_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \\ \gamma_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t} \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje je linearna kombinacija:

$$\vec{w} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 + C_3\vec{y}_3 = \begin{bmatrix} C_1(\alpha_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_2(\alpha_2 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_3(\alpha_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) \\ C_1(\beta_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_2(\beta_2 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_3(\beta_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) \\ C_1(\gamma_1 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_2(\gamma_2 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) + C_3(\gamma_3 e^{\lambda_{1,2,3}\,t}) \end{bmatrix},$$

za proizvoljne realne konstante $C_1, C_2, C_3 \in R$ i parametar $t \in R$.

Zadatak 7. *Rešiti homogeni linearni sistem diferencijalnih jedenačina sa konstantnim koeficijentima:*

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \quad y, \\ z' &= \qquad z. \end{aligned}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{\lambda_{1,2,3} \in R \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \wedge \mathbf{dim}(V_{\lambda_{1,2,3}}) = 3})}$$

Rešenje. Za matricu sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

određujemo prvo karakteristični polinom:

$$P_3(\boldsymbol{\lambda}) = |\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda}\mathrm{I}| = \begin{vmatrix} (1-\boldsymbol{\lambda}) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\boldsymbol{\lambda}) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{\lambda}-1)^3 = -\boldsymbol{\lambda}^3 + 3\boldsymbol{\lambda}^2 - 3\boldsymbol{\lambda} + 1,$$

odakle postoje tri realna karakteristična korena:

$$\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} = 1.$$

Karakterističnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} = 1$ odgovara karakteristični sistem:

$$(\mathcal{S}_0) \qquad \left\{ \begin{aligned} (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\alpha \qquad\qquad &= 0, \\ (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\,\beta \qquad &= 0, \\ (1-\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3})\,\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 0 \qquad &= 0, \\ 0 \quad &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Rešenje ovog sistema je

$$v = (\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\,(1,0,0) + \beta\,(0,1,0) + \gamma\,(0,0,1)$$

i time karakterični vektori ovog prostora su

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Samim tim trostrukom realnom korenu $\boldsymbol{\lambda}_{1,2,3} = 1$ pridružujemo *tri vektorske funkcije rešenja*:

$$\vec{y}_1 = \vec{v}_1\, e^{\lambda_{1,2,3}\, t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} e^t = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{y}_2 = \vec{v}_2\, e^{\lambda_{1,2,3}\, t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{y}_3 = \vec{v}_3\, e^{\lambda_{1,2,3}\, t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} e^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Sveukupno, <u>*opšte rešenje*</u> polaznog homogenog sistema diferencijalnih jednačina je:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= C_1\, \vec{y}_1 + C_2\, \vec{y}_2 + C_3\, \vec{y}_3 \\ &= C_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1\, e^t \\ C_2\, e^t \\ C_3\, e^t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

za ma koje realne konstante C_1, C_2, C_3 i parametar $t \in R$. $\square$

METODE REŠAVANJA NEHOMOGENOG SISTEMA. Neka je dat nehomogen sistem linearnih diferencijalnih jednačina sa realnim konstantim koeficijentima. Ako je određeno rešenje odgovarajućeg homogenog sistema, tada za nehomogen sistem opšte rešenje se određuje Lagranžovom metodom varijacije konstanti.

Literatura: `https://dif.etf.bg.ac.rs/`

Beograd, 18.12.2022.

Prof. dr Branko J. Malešević
Elektrotehnički fakultet, Beograd
http://home.etf.rs/~malesevic/