4 PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

4.1 Parcijalne diferencijalne jednačine - opšta teorija

Definisanje

Neka zadana funkcija $u\!:D \longrightarrow R$ koja je k-puta neprekidno diferencijabilna nad oblašću $D \subseteq R^n$ i neka je zadana funkcija $F:G \longrightarrow R$ koja je neprekidna nad oblašću $G \subseteq R^m$ ($m > n$ i $m, n \in N$). Implicitna funkcionalna veza:

$$(*) \qquad F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{j_{i_1}+\ldots+j_{i_s}} u}{\partial x_{i_1}^{j_{i_1}} \ldots \partial x_{i_s}^{j_{i_s}}}\right) = 0,$$

određuje *parcijalnu jednačinu* po funkciji $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Pri tom maksimum sume indeksa $k = j_{i_1} + \ldots + j_{i_s}$, koji se javlja u $(*)$, određuje *red parcijalne diferencijalne jednačine.*

Pod *rešenjem parcijalne diferencijalne jednačine* podrazumevamo svaku funkciju $u = u(x_1, \ldots, x_n) : D \longrightarrow R$ takvu da jednakost $(*)$ važi za svako $(x_1, \ldots, x_n) \in D$, tj. $(*)$ predstavlja identitet.

Uobičajeno je da *parcijalne diferencijalne jednačine* I *reda* $F\left(x, y, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$ zapisujemo u obliku:

$$(*)_I \qquad F(x, y, u, p, q) = 0,$$

uz upotrebu *Monžovih oznaka*:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x},\ q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Potpuno i opšte rešenje

Navodimo definicje potpunog i opšteg rešenja koje potiču od Lagranža. *Potpuno rešenje* parcijalne diferencijalne jednačine $(*)_I$ razmatramo u obliku funkcije:

$$u = u(x, y, c_1, c_2),$$

za $(x, y) \in D$ i neke konstante c_1 i c_2. Pri tom se zahteva da eliminacijom konstanti se dolazi do $(*)_I$. *Opšte rešenje* parcijalne diferencijalne jednačine $(*)_I$ razmatramo u obliku funkcije:

$$u = u(x, y, c_1, \phi(t)),$$

za $(x, y) \in D$, neku funkciju $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ i (eventualno) neku konstantu c_1. Pri tom se zahteva da eliminacijom funkcije i konstante se dolazi do $(*)_I$.

U narednim delovima zadržaćemo se na izlaganju teorije za homogenu i nehomogenu (kvazilinearnu) parcijalnu diferencijalnu jednačinu I reda.

4.2 Linearna homogena parcijalna diferencijalna jednačina I reda

Linearna homogena parcijalna diferencijalna jednačina I reda je parcijalna diferencijalana jednačina:

$$(1)\quad \boldsymbol{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0},$$

po nepoznatoj diferencijabilnoj funkciji:

$$u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n):D\longrightarrow R,$$

za zadate neprekidne funkcije $X_1,X_2,\ldots,X_n:D\longrightarrow R$, gde je $D\subseteq R^n$ neka oblast. Linearnoj homogenoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini I reda (1) pridružujemo sistem diferencijalnih jednačina:

$$(2)\qquad \boldsymbol{\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}},$$

koji nazivamo *sistem karakteristika linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1).

Neka je za sistem karakteristika (2) određen jedan prvi integral:

$$(3)\qquad \boldsymbol{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=C},$$

za neku diferencijabilnu funkciju $F:D\longrightarrow R$ $(D\subseteq R^n)$. Posmatrajmo funkciju:

$$(4)\qquad \boldsymbol{u=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}:D\longrightarrow R\quad (D\subseteq R^n)$$

Dokazujemo da je u funkcija jedno rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1). Zaista, na osnovu:

$$\boldsymbol{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=C}\implies dF=0$$

i odatle zaključujemo:

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n=0.$$

Dalje, primetimo da iz proporcije

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\lambda\ (\neq 0)$$

sledi

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} dx_1 &=& \lambda\cdot X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ dx_2 &=& \lambda\cdot X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\\ &\vdots& \\ dx_n &=& \lambda\cdot X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n). \end{array}\right\}$$

Zamenom prethodnih veza za $dx_1,dx_2,\ldots,dx_n$ u (5) dobijamo:

$$\lambda\cdot\left(X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial F}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)=0,$$

odnosno:

$$X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial F}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

Napomenimo da je $\lambda \neq 0$ jer su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ promenljive. Ovim je dokazano:

$$\boldsymbol{u=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}\ \ \textbf{jeste rešenje}.$$

Obrnuto, neka je $\boldsymbol{u=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ **jedno rešenje** linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1) da tada F sipunjava sistem karakteristika (2). Tada, polazeći od uslova da je $u=F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ jedno rešenje i od veza (6) za $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zaključujemo:

$$\underbrace{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}_{\frac{dx_1}{\lambda}}\frac{\partial F}{\partial x_1}+\ldots+\underbrace{X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)}_{\frac{dx_n}{\lambda}}\frac{\partial F}{\partial x_n}=0.$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n\right)=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n=0.$$

Ovim je dokazano:

$$dF=0;$$

tj.

$$\boldsymbol{F(x_1,\ldots,x_n)=C},$$

za neku realnu kostantu C.

Na osnovu prethodnog razmatranja je dokazano tvrđenje.

Teorema 4.1.

1°. *Svako rešenje sistema karakteristika* (2) *u obliku prvog integrala* (3) *određuje jedno rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1) *u obliku* (4).

2°. *Svako rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1) *u obliku* (4) *određuje jedno rešenje sistema karakteristika* (2) *u obliku prvog integrala* (3).

Napomena 4.2. *Prethodnim tvrđenjem je pokazano da rešavanje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1) *i rešavanje sistema karakteristika* (2) *su međusobno ekvivalentni problemi.*

Zadatak 1. *Naći jedno rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda*:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Rešenje. Posmatrajmo odgovarajući sistem karakteristika:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}, \tag{2}$$

iz koga direktno integracijom nalazimo jedan prvi integral prethodnog sistema:

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int\frac{dy}{y^2} \ \Longrightarrow\ -\frac{1}{x}=-\frac{1}{y}+C, \ \text{ tj. } \ u=F(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=C,$$

za neku realnu konstantu C. Odatle jedno rešenje polazne linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda je dato sa funkcijom:

$$u = F(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} : D \longrightarrow R,$$

gde je $D = \big\{(x,y) \in R^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\big\} \subseteq R^2$. □

Prelazimo na tvrđenje kog oblika mogu da budu rešenja linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda. Naime, neka je dato k rešenja linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1) sa:

$$\begin{aligned} u_1 &= F_1(x_1,\dots,x_n),\\ u_2 &= F_2(x_1,\dots,x_n),\\ &\;\vdots\\ u_k &= F_k(x_1,\dots,x_n), \end{aligned}$$

sa diferencijabilnim funkcijama $F_1, F_2, \dots, F_k : D \longrightarrow R$ nad oblasti $D \subseteq R^n$. Neka je data proizvoljna diferencijabilna funkcija:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t_1,\dots,t_k) : E \longrightarrow R,$$

za odgovarajući domen $E \subseteq R^k$, tako da postoji kompozicija:

$$u = \mathbf{\Phi}\big(F_1(x_1,\dots,x_n), F_2(x_1,\dots,x_n), \dots, F_k(x_1,\dots,x_n)\big) : D \longrightarrow R.$$

Polazeći od pretpostavke da su sa diferencijabilnim funkcijama $F_1, F_2, \dots, F_k : D \longrightarrow R$ nad oblasti $D \subseteq R^n$ određena rešenja, tada važi:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} + \dots + X_n\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0, \;\Big/ \cdot \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_1}\\ X_1\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + X_n\dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} = 0, \;\Big/ \cdot \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_2}\\ \qquad\qquad\qquad\vdots\\ X_1\dfrac{\partial F_k}{\partial x_1} + X_2\dfrac{\partial F_k}{\partial x_2} + \dots + X_n\dfrac{\partial F_k}{\partial x_n} = 0 \;\Big/ \cdot \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_k} \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{aligned} X_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_1} + X_2\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_1} + \dots + X_n\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_1} &= 0,\\ X_1\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_2} + X_2\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_2} + \dots + X_n\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_2} &= 0,\\ &\;\vdots\\ X_1\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_k} + X_2\frac{\partial F_k}{\partial x_2}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_k} + \dots + X_n\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_k} &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} X_1\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \dots + X_n\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_n} &= 0,\\ X_1\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + X_n\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_n} &= 0,\\ &\;\vdots\\ X_1\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_2} + \dots + X_n\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_n} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Sabiranjem prethodnih k jednačina dobijamo:

$$X_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_n} = 0;$$

tj.

$$X_1 \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial x_n} = 0,$$

sa proizvoljnom diferencijabilnom funkcijom $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t_1, \ldots, t_k) : E \longrightarrow R$, za odgovarajući domen $E \subseteq R^k$, Ovim je dokazano tvrđenje.

Teorema 4.3. *Neka je dato k rešenja linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1) *sa*:

$$\begin{aligned} u_1 &= F_1(x_1, \ldots, x_n), \\ u_2 &= F_2(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ u_k &= F_k(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

sa diferencijabilnim funkcijama $F_1, F_2, \ldots, F_k : D \longrightarrow R$ nad oblasti $D \subseteq R^n$. Neka je data proizvoljna diferencijabilna funkcija:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t_1, \ldots, t_k) : E \longrightarrow R,$$

za odgovarajući domen $E \subseteq R^k$, tako da postoji kompozicija:

$$u = \mathbf{\Phi}\big(F_1(x_1, \ldots, x_n), F_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_k(x_1, \ldots, x_n)\big) : D \longrightarrow R.$$

Tada je:

$$u = \mathbf{\Phi}(F_1, \ldots, F_k)(x_1, \ldots, x_n) : D \longrightarrow R$$

jedno rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1).

Dalje, može se pokazati da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 4.4. *Neka je sistem karakteristika* (2) *sa tačno $(n-1)$ funkcionalno nezavisnih prvih integrala*:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n) &= C_1, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) &= C_2, \\ &\vdots \\ F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) &= C_{n-1}; \end{aligned}$$

sa diferencijabilnim funkcijama $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1} : D \longrightarrow R$ nad oblasti $D \subseteq R^n$. Neka je data proizvoljna diferencijabilna funkcija:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t_1, \ldots, t_{n-1}) : E \longrightarrow R,$$

za odgovarajući domen $E \subseteq R^{n-1}$, tako da postoji kompozicija:

$$u = \mathbf{\Phi}\big(F_1(x_1, \ldots, x_n), F_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\big) : D \longrightarrow R.$$

Tada je:

$$u = \mathbf{\Phi}(F_1, \ldots, F_{n-1})(x_1, \ldots, x_n) : D \longrightarrow R$$

rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1) *koje sadrži sva rešenja linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1).

Rešenje određeno u prethodnoj teoremi:

$$u = \mathbf{\Phi}\big(F_1(x_1,\ldots,x_n), F_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)\big) : D \longrightarrow R.$$

nazivano *opštim rešenjem linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1). Primetimo da opšte rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine ima jednu proizvoljnu funkciju $\mathbf{\Phi}$ (slično linearnim diferencijalnim jednačinama I reda čije opšte rešenje sadrži jednu konstantu). Pod *partikularnim rešenjem homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1) podrazumevamo svako koje se dobija iz opšteg izborom konkretne funkcije $\mathbf{\Phi}$.

Zadatak 2. *Naći opšte rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda*:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Rešenje. Kao u prethodnom zadatku jedno rešenje polazne linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda je dato sa funkcijom:

$$u = F(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} : D \longrightarrow R,$$

gde je $D = \big\{(x,y) \in R^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\big\} \subseteq R^2$. Ove se radi o $n=2$ promenljive x i y. Prema prethodnoj Teoremi *opšte rešenje* polazne linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine je dato u obliku:

$$u = \mathbf{\Phi}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) : D \longrightarrow R,$$

za proizvoljnu funkciju $\mathbf{\Phi} : R \longrightarrow R$. Konkretno izborom $\mathbf{\Phi}(t) = t$ dobija se iz opšteg rešenja funkcija $u = F(x,y) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} : D \longrightarrow R$ kao jedno partikularno rešenje. $\square$

Neka je određeno opšte rešenje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1) dato, saglasno Teoremi 4.4., u obliku:

$$u = \mathbf{\Phi}\big(F_1(x_1,\ldots,x_n), F_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)\big) : D \longrightarrow R,$$

za neku oblast $D \subseteq R^n$. U prethodnom zapisu $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ određuje tačno $(n-1)$ funkcionalno nezavisnih prvih integrala i $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t_1,\ldots,t_{n-1}) : E \longrightarrow R$ je proizvoljna diferencijabilna funkcija takva da postoji kompozicija:

$$u = \mathbf{\Phi}(F_1,\ldots,F_{n-1})(x_1,\ldots,x_n) : D \longrightarrow R.$$

Košijeve uslove zadajamo u obliku konjukcije:

$$x_1 = t_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; x_n = t_n \;\wedge\; u(t_1,\ldots,t_n) = \phi(t_1,\ldots,t_n),$$

gde su $t_i = t_i(x_1,\ldots,x_n)$ termi i $\phi : D_0 \longrightarrow R$ konkretna funkcija definisana nad $D_0 \subseteq D$. Pod *Košijevim rešenjem* linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1) podrazumevamo ono partikularno rešenje:

$$u = \mathbf{\Phi}_0(F_1,\ldots,F_{n-1})(x_1,\ldots,x_n) : D \longrightarrow R,$$

koje sa izborom funkcije $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0$ u opštem rešenju ispunjava zadate Košijeve uslove.

Zadatak 3. *Rešiti linearnu homogenu parcijalnu diferencijalnu jednačinu I reda:*

$$(y-z)^2\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial z}=0, \tag{1}$$

po funkciji $u=u(x,y,z)$ *i zatim naći Košijevo rešenje za uslove:*

$$x=0\ \wedge\ u(0,y,z)=2y^2-2yz.$$

Rešenje. Formirajmo sistem karakteristika:

$$\frac{dx}{(y-z)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}. \tag{2}$$

Odatle, na osnovu osobina proporcija, važi:

$$\frac{dx}{(y-z)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}=-\frac{d(y-z)}{y-z}.$$

Samim tim:

$$dx=-(y-z)\,d(y-z),$$

tj.

$$x=-\frac{(y-z)^2}{2}+\widehat{C}_1,$$

za proizvoljnu realnu konstantu $\widehat{C}_1$. Odavde nalazimo prvi integral u prvoj formi:

$$\boldsymbol{F_1(x,y,z)=2x+(y-z)^2=C_1},$$

za proizvoljnu realnu konstantu $C_1=2\widehat{C}_1$. Dalje, iz sistema karakterisitka (2) nalazimo prvo vezu:

$$y\,dy=z\,dz,$$

odakle

$$\frac{y^2}{2}=\frac{z^2}{2}+\widehat{C}_2,$$

za proizvoljnu realnu konstantu $\widehat{C}_2$. Samim tim prvi integral u drugoj formi je dat sa:

$$\boldsymbol{F_2(x,y,z)=y^2-z^2=C_2},$$

za proizvoljnu realnu konstantu $C_2=2\,\widehat{C}_2$.

Može se proveriti da su funkcije prvih integrala $F_1,F_2:R^3\longrightarrow R$ funkcionalno nezavisne[†]. Samim tim *opšte rešenje* linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda je dato sa sledećom funkcijom:

$$u=u(x,y,z)=\mathbf{\Phi}(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z))=\mathbf{\Phi}(2x+(y-z)^2,y^2-z^2),$$

† na osnovu dodatne provere:

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}(2x+y^2-2yz+z^2) & \frac{\partial}{\partial z}(2x+y^2-2yz+z^2)\\ \frac{\partial}{\partial y}(y^2-z^2) & \frac{\partial}{\partial z}(y^2-z^2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(2y-2z) & (2z-2y)\\ 2y & -2z\end{vmatrix}=4(y-z)^2\neq 0.$$

gde je $\mathbf{\Phi} : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna diferencijabilna funkcija. Sad *razmotrimo ispunjenje Košijevog uslova* sa jednakošću koja dovodi do konkretne funkcije $\mathbf{\Phi}$:

$$\begin{aligned} u(0,y,z) &= \mathbf{\Phi}(2\cdot 0+(y-z)^2, y^2-z^2) = 2y^2-2yz \\ \Longrightarrow \qquad & \mathbf{\Phi}((y-z)^2,(y-z)(y+z)) = 2y^2-2yz. \end{aligned}$$

Uvedimo nove oznake:

$$\mathtt{p} = y-z \wedge \mathtt{q} = y+z;$$

preko kojih je:

$$y = \frac{\mathtt{p}+\mathtt{q}}{2} \wedge z = \frac{\mathtt{q}-\mathtt{p}}{2}.$$

Na osnovu tih oznaka zaključujemo:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(\mathtt{p}^2,\mathtt{p}\,\mathtt{q}) &= 2\Big(\frac{\mathtt{p}+\mathtt{q}}{2}\Big)^2 - 2\frac{\mathtt{p}+\mathtt{q}}{2}\frac{\mathtt{q}-\mathtt{p}}{2} \\ &= \Big(\frac{1}{2}\mathtt{p}^2+\mathtt{p}\,\mathtt{q}+\frac{1}{2}\mathtt{q}^2\Big) - \frac{1}{2}\mathtt{q}^2 + \frac{1}{2}\mathtt{p}^2 \\ &= \mathtt{p}^2 + \mathtt{p}\,\mathtt{q}. \end{aligned}$$

Iz prethodne jednakosti, uvodeći $\boldsymbol{\alpha} = \mathtt{p}^2$ i $\boldsymbol{\beta} = \mathtt{p}\,\mathtt{q}$, zaključujemo da *Košijev uslov određuje konkretnu funkciju* $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0$ datu sa:

$$\mathbf{\Phi}_0 = \mathbf{\Phi}_0(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}.$$

Samim tim *Košijevo rešenje* je funkcija:

$$u(x,y,z) = \mathbf{\Phi}_0(2x+(y-z)^2, y^2-z^2) = 2x+(y-z)^2+y^2-z^2. \qquad \Box$$

4.3 Linearna nehomogena parcijalna diferencijalna jednačina I reda

Linearna nehomogena (kvazilinearna) parcijalna diferencijalna jednačina I reda je parcijalna diferencijalana jednačina:

$$(1) \qquad \boldsymbol{X_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,u)},$$

po nepoznatoj funkciji:

$$u = u(x_1,x_2,\ldots,x_n) : D \longrightarrow R,$$

za zadate neprekidne funkcije $X_1,X_2,\ldots,X_n,X_{n+1} : E \longrightarrow R$ za oblasti $D \subseteq R^n$ i $E \subseteq R^{n+1}$. Neka postoji *implicitna veza*:

$$(*) \qquad \boldsymbol{\Phi(x_1,\ldots,x_n,u(x_1,\ldots,x_n)) = 0},$$

sa nekom funkcijom $\Phi = \Phi(x_1,\ldots,x_n,u) : E \longrightarrow R$ nad oblasti $E \subseteq R^{n+1}$. U tom slučaju nehomogenoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini I reda (1) pridružujemo *prateću linearnu homogenu parcijalnu diferencijalnu jednačinu I reda*:

$$(1)_H \quad \boldsymbol{X_1(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} + X_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,u)\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 0},$$

po nepoznatoj funkciji:

$$\Phi = \Phi(x_1,\ldots,x_n,u) : E \longrightarrow R.$$

Važi tvrđenje:

Teorema 4.5. *Neka funkcija:*

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \longrightarrow R,$$

nad oblasti $D \subseteq R^n$*, ispunjava implicitnu vezu* $(*)$ *za datu funkciju:*

$$\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n, u) : E \longrightarrow R,$$

gde je $E \subseteq R^{n+1}$*. Tada funkcija* u *jeste rešenje nehomogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine* (1) *ako i samo ako funkcija* Φ *jeste rešenje prateće homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine* $(1)_H$*.*

Dokaz. **($\Longrightarrow$)** Neka je funkcija $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \longrightarrow R$, jedno rešenje nehomogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine (1). Na osnovu implicitne veze $(*)$ zaključujemo:

$$\frac{d\Phi}{dx_1} \underset{(*)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}},$$

$$\frac{d\Phi}{dx_2} \underset{(*)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}},$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d\Phi}{dx_n} \underset{(*)}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}}.$$

Sad zamenom prethodno određenih izraza za $\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x_1}}, \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x_2}}, \ldots, \boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x_n}}$ u polaznu nehomogenu linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu (1) dobijamo:

$$-\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}} \cdot \left(X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right) = X_{n+1}.$$

Odatle, množenjem sa $-\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ zaključujemo da je funkcija:

$$\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n, u) : E \longrightarrow R$$

jedno rešenje homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine $(1)_H$ date sa:

$$X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + X_{n+1} \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0.$$

($\Longleftarrow$) Obrnuto neka je Φ ma koje rešenje homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine $(1)_H$. Može se pokazati, slično prethodnom izvođenju, da funkcija u koja ispunjava implicitnu vezu $(*)$ jeste jedno rešenje nehomogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine (1). $\square$

Napomena 4.6. *Prethodnim tvrđenjem je pokazano da rešavanje linearne nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1) *i rešavanje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* $(1)_H$ *su međusobno ekvivalentni problemi. Time se povezuje teorija ova dva tipa parcijalnih diferencijalnih jednačina.*

Linearnoj nehomogenoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini I reda (1) pridružujemo sistem diferencijalnih jednačina:

$$(2) \qquad \frac{\boldsymbol{dx_1}}{\boldsymbol{X_1(x_1,\ldots,x_n,u)}} = \ldots = \frac{\boldsymbol{dx_n}}{\boldsymbol{X_n(x_1,\ldots,x_n,u)}} = \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{X_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,u)}},$$

koji nazivamo *sistem karakteristika linearne nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1).

Važi tvrđenje:

Teorema 4.7. *Neka je sistem karakteristika* (2) *sa tačno n funkcionalno nezavisnih prvih integrala*:

$$\begin{aligned} F_1(x_1,\ldots,x_n,u) &= C_1,\\ F_2(x_1,\ldots,x_n,u) &= C_2,\\ &\vdots\\ F_n(x_1,\ldots,x_n,u) &= C_n, \end{aligned}$$

sa diferencijabilnim funkcijama $F_1, F_2, \ldots, F_n : D \longrightarrow R$ nad oblasti $D \subseteq R^{n+1}$. Neka je data proizvoljna diferencijabilna funkcija:

$$\Phi = \boldsymbol{\Phi}(t_1,\ldots,t_n) : E \longrightarrow R,$$

za odgovarajući domen $E \subseteq R^n$, tako da postoji kompozicija:

$$\Phi = \boldsymbol{\Phi}\big(F_1(x_1,\ldots,x_n,u), F_2(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,F_n(x_1,\ldots,x_n,u)\big) : D \longrightarrow R.$$

Tada je:

$$\Phi = \boldsymbol{\Phi}(F_1,\ldots,F_n)(x_1,\ldots,x_n,u) : D \longrightarrow R$$

opšte rešenje homogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine I reda $(1)_H$. Sa implicitnom vezom:

$$(*) \qquad \boldsymbol{\Phi}(F_1,\ldots,F_n)(x_1,\ldots,x_n,u) = 0$$

određeno je rešenje nehomogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1) *koje sadrži sva ostala rešenja.*

Napomena 4.8. *Prethodna implicitna veza $(*)$ određuje <u>opšte rešenje</u> nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1)*. Pod <u>partikularnim rešenjem</u> nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda* (1) *podrazumevamo svako koje se dobija iz opšteg, izborom funkcije $\boldsymbol{\Phi}$, a da pri tom nije opšte.*

Napomena 4.9. *U nekim slučajevima iz implicitne veze $(*)$ moguće je naći eksplicitan oblik opšteg rešenja*

$$u = u(x_1,x_2,\ldots,x_n) : D \longrightarrow R,$$

nehomogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1)*, uz učešće jedne proizvoljne funkcije.*

Zadatak 4. *Naći opšte rešenje linearne nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda*:

$$(1) \qquad x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u,$$

po funkciji $u = u(x,y,z)$.

Rešenje. Formirajmo sistem karakteristika:

$$\text{(2)} \qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}.$$

Odatle se nalaze tri funkcionalno nezavisna prva integrala:

$$F_1(x, y, z, u) = xy = C_1,$$

$$F_2(x, y, z, u) = yz = C_2,$$

$$F_3(x, y, z, u) = \frac{u}{z} = C_3$$

za neke realne konstante C_1, C_2, C_3. *Sa implicitnom vezom*:

$$\mathbf{\Phi}(F_1, F_2, F_3)(x, y, z, u) = 0 \iff \mathbf{\Phi}\Big(xy, yz, \frac{u}{z}\Big) = 0,$$

gde je $\mathbf{\Phi} : R^3 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija, *određeno je opšte rešenje* nehomogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1). Pod pretpostavkom rešivosti prethodne implicitne veze opšteg rešenja po u/z, tada opšte rešenje u ispunjava:

$$\frac{u}{z} = \mathbf{\Psi}\left(xy, yz\right),$$

za $\mathbf{\Psi} : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljnu funkciju. Time dobijamo *eksplicitni zapis opšteg rešenja*:

$$u = z\mathbf{\Psi}\left(xy, yz\right). \qquad \square$$

Zadatak 5. *Naći opšte rešenje linearne nehomogene parcijalne diferencijalne jednačine I reda*:

$$\text{(1)} \qquad yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy,$$

po funkciji $z = z(x, y)$. Na osnovu opšteg rešenja naći ono partikularno rešenje koje sadrži krivu:

$$z = 3 \ \wedge \ x^2 + y^2 = 16.$$

Rešenje. Formirajmo sistem karakteristika:

$$\text{(2)} \qquad \frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-2xy}.$$

Odatle se nalaze dva funkcionalno nezavisna prva integrala:

$$F_1(x, y, z) = x^2 - y^2 = C_1,$$

$$F_2(x, y, z) = 2x^2 + z^2 = C_2$$

za neke realne konstante $C_1 \in R$ i $C_2 \in R^+$. *Sa implicitnom vezom*:

$$\mathbf{\Phi}(F_1, F_2)(x, y, z) = 0 \iff \mathbf{\Phi}\big(\underbrace{x^2 - y^2}_{F_1}, \underbrace{2x^2 + z^2}_{F_2}\big) = 0,$$

gde je $\mathbf{\Phi} : R^2 \longrightarrow R$ proizvoljna funkcija, *određeno je opšte rešenje* nehomogene linearne parcijalne diferencijalne jednačine I reda (1). Pod pretpostavkom rešivosti prethodne implicitne veze opšteg rešenja po F_2, tada opšte rešenje z ispunjava:

$$F_2(x, y, z) = \mathbf{\Psi}(F_1)(x, y, z) \iff 2x^2 + z^2 = \mathbf{\Psi}\big(x^2 - y^2\big),$$

za $\mathbf{\Psi} : R \longrightarrow R$ proizvoljnu funkciju. Na ovaj način dobijamo *drugi implicitni zapis opšteg rešenja*:

$$2x^2 + z^2 = \mathbf{\Psi}\big(x^2 - y^2\big).$$

Partikularno rešenje koje ispunjava konjukciju uslova:

$$z = 3 \ \wedge \ x^2 + y^2 = 16$$

se određuje na sledeći način:

$$2x^2 + \underbrace{9}_{=z^2} = \boldsymbol{\Psi}\big(x^2 - y^2\big) = \boldsymbol{\Psi}\big(x^2 - \underbrace{(16 - x^2)}_{=y^2}\big) = \boldsymbol{\Psi}\big(2x^2 - 16\big).$$

Na ovaj način su upotrebljena oba konjukta pretpostavke. Uvodeći smenu $t = 2x^2 - 16$ u poslednje dobijenoj jednakosti nalazimo konkretan izbor funkcije:

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_0(t) = t + 25,$$

koji dovodi do traženog partikularnog rešenja.

Koristeći $\boldsymbol{\Psi}_0(t) = t + 25$, na osnovu:

$$2x^2 + z^2 = \boldsymbol{\Psi}_0\big(x^2 - y^2\big),$$

nalazimo *traženo partikulano rešenje u implicitnom obliku*:

$$2x^2 + z^2 = \boldsymbol{\Psi}_0\big(x^2 - y^2\big) = x^2 - y^2 + 25 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 25}.$$

$\square$

Literatura: `https://dif.etf.bg.ac.rs/`

Beograd, 18.12.2022.

Prof. dr Branko J. Malešević
Elektrotehnički fakultet, Beograd
`http://home.etf.rs/~malesevic/`