LINEARNA ALGEBRA

1. Vektorski prostori

1.1. Polja skalara

Polazni pojam u definisanju pojma vektorskog prostora je pojam polja $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ kao algebarske strukture sa od ranije poznatom aksiomatikom. Napomenimo da neutralni element za sabiranje označavamo sa 0_F i neutralni element za množenje označavamo sa 1_F. Elemente polja $\mathbf{F}$ nazivamo *skalarima.*

Primer 1.1.1 Primeri polja: $\mathbf{Z}_p$ (p-prost broj), $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{GF}(p^k)$ (p-prost broj i k-prirodan broj).

1.2. Definicija vektorskog prostora

Definicija 1.2.1 Neka je V neprazan skup čije elemente zovemo *vektorima* i neka je $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ polje skalara. Algebarska struktura

$$\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$$

naziva se *vektorski prostor* $\mathbf{V}$ *nad poljem* $\mathbf{F}$ ako za binarnu operaciju sabiranja vektora $+ : V^2 \longrightarrow V$ i spoljnu operaciju množenja skalara i vektora $\cdot : F \times V \longrightarrow V$ važe aksiome:

(V_1) $(V, +)$ jeste Abelova grupa,

(V_2) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ za svako $\lambda \in F$ i $x, y \in V$,

(V_3) $(\lambda +_F \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ za svako $\lambda, \mu \in F$ i $x \in V$,

(V_4) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot_F \mu) \cdot x$ za svako $\lambda, \mu \in F$ i $x \in V$,

(V_5) $1_F \cdot x = x$ za svaki $x \in V$.

Drugim rečima, vektorski prostor $\mathbf{V}$ možemo odrediti uređenim parom $(V, \mathbf{F})$ tako da važi:

(i) V neprazan skup (njegove elemente zovemo vektorima).

(ii) $\mathbf{F}$ je polje (njegove elemente zovemo skalarima).

(iii) U skupu V je definisana binarna operacija $+ : V^2 \longrightarrow V$, koju nazivamo sabiranje vektora, takva da važi aksioma (V_1).

(iv) Definisana je spoljna operacija $\cdot : F \times V \longrightarrow V$, koju zovemo množenje skalara i vektora za koju važe aksiome $(V_2) - (V_5)$.

Napomena 1.2.1 Uobičajeno je da skalare označavamo malim slovima grčkog alfabeta: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ i da vektore označavamo malim slovima abecede: $a, b, c, \ldots$. Dalje, $\alpha +_F \beta$ označavaćemo sa $\alpha + \beta$, odnosno $\alpha \cdot_F \beta$ označavaćemo sa $\alpha\beta$. U daljem razmatranju nulu polja 0_F i jedinicu polja 1_F označavaćemo sa 0 i 1 respektivno.

Napomena 1.2.2 Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Ukoliko je $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, tada vektorski prostor nazivamo *realnim vektorskim prostorom*, dok za $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ nazivamo *kompleksnim vektorskim prostorom.*

1.3. Primeri vektorskih prostora

Primer 1.3.1 Vektorski prostor uređenih n-torki $\mathbf{F}^n = (F^n, +, \cdot)$ je određen skupom vektora

$$F^n = \{\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \,|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F \,\}$$

i sa dve operacije. Prva operacija je binarna operacija sabiranja vektora

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n), \tag{1}$$

za $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in F^n$. Druga operacija je spoljna operacija množenja skalara i vektora

$$\lambda \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\lambda \cdot \alpha_1, \ldots, \lambda \cdot \alpha_n), \tag{2}$$

za $\lambda \in F$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$.

Algebarska struktura $\mathbf{F}^n = (F^n, +, \cdot)$ ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{F}$.

Ilustrujmo skicu dokaza da je $\mathbf{R}^3 = (R^3, +, \cdot)$ vektorski prostor. Elementi skupa

$$R^3 = \{\, (\alpha, \beta, \gamma) \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in R \,\},$$

su uređene trojke i njih nazivamo vektori. Skalari su realni brojevi. Ako zapišemo uređenu trojku $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ standardno smatramo da je α na poziciji prve koordinate, β na poziciji druge koordinate i γ na poziciji treće koordinate. Saglasno (1) određujemo binarnu operaciju sabiranja dva vektora sabiranjem odgovarajućih koordinata vektora i saglasno (2) razmatramo spoljašnju operaciju množenja skalara sa vektorom množenjem tog skalara po odgovarajućim koordinatama vektora.

Aksioma (V_1) da je algebarska struktura $(R^3, +)$ Abelova grupa se jednostavno proverava:

1. Operacija sabiranja vektora je unutrašnja jer za dva vektora $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in R^3$ je ispunjeno

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2) \in R^3.$$

2. Operacija sabiranja vektora je asocijativna jer je takva po koordinatama.

3. Neutral za operaciju sabiranja vektora je nula vektor $(0, 0, 0)$.

4. Inverz za operaciju sabiranja vektora je $-(\alpha, \beta, \gamma) = (-\alpha, -\beta, -\gamma)$ za zadat vektor $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$.

5. Operacija sabiranja vektora je komutativna jer je takva po koordinatama.

Ostale aksioma $(V_2) - (V_5)$ se jednostavno proveravaju razmatrajući vektore x i y kao uređene trojke realnih brojeva, odnosno skalare λ i μ kao realne brojeve. □

Primer 1.3.2 Vektorski prostor polinoma stepena ne većeg od n je određen kao algebarska struktura $\mathbf{F}^n[x] = (F^n[x], +, \cdot)$ razmatranjem skupa vektora

$$F^n[x] = \big\{\, a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \ldots, a_1, a_0 \in F \ \wedge \ a_n \neq 0 \,\big\}$$

i dve operacije. Prva operacija je binarna operacija sabiranja vektora

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)\, x^i,$$

za $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in F^n[x]$. Druga operacija je spoljna operacija množenja skalara i vektora

$$\lambda \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i)\, x^i,$$

za $\lambda \in F$ i $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in F^n[x]$.

Algebarska struktura $\mathbf{F}^n[x] = (F^n[x], +, \cdot)$ ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{F}$.

$\square$

Primer 1.3.3 Vektorski prostor matrica formata $m \times n$ je određen kao algebarska struktura $\mathbf{F}^{m\times n} = (F^{m\times n}, +, \cdot)$ razmatranjem skupa vektora

$$F^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \; : \; a_{ij} \in F \right\}$$

i dve operacije. Prva operacija je binarna operacija sabiranja matrica

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \cdots & \alpha_{2n}+\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \alpha_{m2}+\beta_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{bmatrix},$$

za $\mathsf{A} = [\alpha_{ij}], \mathsf{B} = [\beta_{ij}] \in F^{m\times n}$. Druga operacija je spoljna operacija množenja skalara i matrice

$$\lambda \cdot \mathsf{A} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\cdot\alpha_{11} & \lambda\cdot\alpha_{12} & \cdots & \lambda\cdot\alpha_{1n} \\ \lambda\cdot\alpha_{21} & \lambda\cdot\alpha_{22} & \cdots & \lambda\cdot\alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\cdot\alpha_{m1} & \lambda\cdot\alpha_{m2} & \cdots & \lambda\cdot\alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

za $\lambda \in F$ i $\mathsf{A} = [\alpha_{ij}] \in F^{m\times n}$.

Algebarska struktura $\mathbf{F}^{m\times n} = (F^{m\times n}, +, \cdot)$ ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{F}$.

$\square$

Primer 1.3.4 Vektorski prostor realnih nizova $\boldsymbol{l}_p = (\, l_p, +, \cdot\,)$ je određen skupom nizova za $p \geq 1$:

$$l_p = \left\{ (a_n) \; : \; a_i \in F \;\wedge\; \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < \infty \right\}$$

i sa dve operacije. Prva operacija je binarna operacija sabiranja nizova

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n),$$

za $(a_n), (b_n) \in l_p$. Druga operacija je spoljna operacija množenja skalarom niza

$$\lambda \cdot (a_n) = (\lambda \cdot a_n),$$

za $\lambda \in F$ i $(a_n) \in l_p$.

Algebarska struktura $\boldsymbol{l}_p = (\, l_p, +, \cdot\,)$ ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{F}$.

$\square$

Primer 1.3.5 Vektorski prostor neprekidnih funkcija $\boldsymbol{C}[a,b] = (\,C[a,b],+,\cdot\,)$ je određen skupom neprekidnih funkcija nad segmentom $[a,b]$:

$$C[a,b] = \Big\{\, f : [a,b] \longrightarrow R \,|\, f\text{−neprekidna nad } [a,b] \,\Big\}$$

i sa dve operacije. Prva operacija je binarna operacija sabiranja funkcija

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

za svako $x \in [a,b]$ i $f,g \in C[a,b]$. Druga operacija je spoljna operacija množenja skalarom funkcije

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x),$$

za svako $x \in [a,b]$ i $\lambda \in R$, $f \in C[a,b]$.

Algebarska struktura $\boldsymbol{C}[a,b] = (\,C[a,b],+,\cdot\,)$ ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{R}$. □

Primer 1.3.6 Vektorski prostor diferencijabilnih funkcija $\boldsymbol{D}[a,b] = (\,D[a,b],+,\cdot\,)$ je određen skupom diferencijabilnih funkcija nad segmentom $[a,b]$:

$$D[a,b] = \Big\{\, f : [a,b] \longrightarrow R \,|\, f\text{−diferencijabilna nad } [a,b] \,\Big\}$$

i sa dve operacije. Prva operacija je binarna operacija sabiranja funkcija

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

za svako $x \in [a,b]$ i $f,g \in D[a,b]$. Druga operacija je spoljna operacija množenja skalarom funkcije

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x),$$

za svako $x \in [a,b]$ i $\lambda \in R$, $f \in D[a,b]$.

Algebarska struktura $\boldsymbol{D}[a,b] = (\,D[a,b],+,\cdot\,)$ ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{R}$. □

Primer 1.3.7 Vektorski prostor integrabilnih funkcija $\boldsymbol{L}_p[a,b] = (\,L_p[a,b],+,\cdot\,)$ je određen skupom integrabilnih funkcija nad segmentom $[a,b]$ za $p \geq 1$:

$$L_p[a,b] = \left\{\, f : [a,b] \longrightarrow R \;\Big|\; \int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx < \infty \,\right\}$$

i sa dve operacije. Prva operacija je binarna operacija sabiranja funkcija

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

za svako $x \in [a,b]$ i $f,g \in L_p[a,b]$. Druga operacija je spoljna operacija množenja skalarom funkcije

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x),$$

za svako $x \in [a,b]$ i $\lambda \in R$, $f \in L_p[a,b]$.

Algebarska struktura $\boldsymbol{L}_p[a,b] = (\,L_p[a,b],+,\cdot\,)$ ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{R}$. □

Primer 1.3.8 Neka je data homogena linearna diferencijalna jednačina

$$(*)_H \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

gde su $a_1, \ldots, a_n : D_1 \longrightarrow R$ neprekidne funkcije nad $D_1 \subseteq R$. Posmatrajmo skup rešenja $(*)_H$:

$$\mathcal{S} = \Big\{ y : D_1 \longrightarrow R \mid L_n[y] = 0 \Big\}.$$

Rešenja određujemo kao vektore, a realne brojeve kao sklare. Uvedimo binarnu operacija sabiranja vektora

$$(y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x),$$

za svako $x \in [a, b]$ i $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ i uvedimo spoljnu operacija množenja skalara i vektora

$$(\lambda \cdot y)(x) = \lambda \cdot y(x),$$

za svako $x \in [a, b]$ i $\lambda \in R$, $y \in L_p[a, b]$. Tada algebarska struktura

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}, +, \cdot)$$

ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{R}$. □

Primer 1.3.9 Neka je $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ proizvoljno polje i $D \subseteq F$ neprazan podskup. Formirajmo skup svih funkcija koje slikaju domen D u skup F

$$F^D = \{\, f : D \longrightarrow F \,\}.$$

Uvedimo binarnu operacija sabiranja vektora

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

za svako $x \in [a, b]$ i $f_1, f_2 \in F^D$ i uvedimo spoljnu operacija množenja skalara i vektora

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x),$$

za svako $x \in [a, b]$ i $\lambda \in F$, $f \in F^D$. Tada algebarska struktura

$$\mathbf{F}^D = \big(F^D, +, \cdot\big)$$

ispunjava aksiome vektorskog prostora nad poljem skalara $\mathbf{F}$. □

1.4. Osnovne osobine vektorskih prostora

Teorema 1.4.1 Ako je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$, tada za svaki skalar $\lambda \in F$ i svaki vektor $a \in V$ važi:

1°. $\lambda \cdot 0 = 0$,

2°. $0 \cdot a = 0$,

3°. $\lambda \cdot a = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \vee a = 0$.

Teorema 1.4.2 Ako je $\mathbf{V} = (V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$, tada za svaki vektor $a \in V$ važi:

4°. $-a = (-1) \cdot a$.

1.5. Vektorski potprostori

Definicija 1.5.1 Neka je $\mathbf{V}=(V,+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Tada podskup $W \subseteq V$ određuje *vektorski potprostor* $\mathbf{W}$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ ako važi:

1°. $W \neq \emptyset$.

2°. Za skup W restrikcije operacija $+ = +|_W : W^2 \longrightarrow W$ i $\cdot = \cdot|_W : F \times W \longrightarrow W$ određuju vektorski prostor $\mathbf{W} = (W,+,\cdot)$.

Drugim rečima, skup $W \subseteq V$ ($W \neq \emptyset$), za vektorski prostor $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$, određuje vektorski potprostor $\mathbf{W}$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ ako je $\mathbf{W} = (W, \mathbf{F})$ vektorski prostor. Prema aksiomatici vektorskih prostora proizvoljni vektorski prostor sadrži nula vektor 0. Samim tim svaki vektorski prostor $\mathbf{V}$ za koji postoje i ne-nula vektori ($V \neq \{0\}$) ima bar dva tvz. *trivijalna potprostora* $(\{0\},+,\cdot)$ i $(V,+,\cdot)$, svi ostali potprostori nazivaju se *pravi potprostori.*

Teorema 1.5.1 Neprazan podskup $W \subseteq V$ određuje vektorski potprostor $\mathbf{W}$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ nad poljem skalara $\mathbf{F}$ ako i samo ako važi

$$(\forall x, y \in W)(\forall \lambda, \mu \in F)\ \ \lambda\cdot x + \mu\cdot y \in W.$$

1.6. Linearna zavisnost

Definicija 1.6.1 Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Za $v_1, ..., v_n \in V$ i $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ vektor

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n$$

predstavlja *linearnu kombinaciju vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Definicija 1.6.2 Skup svih linearnih kombinacija vektora $v_1, \ldots, v_n$ vektorskog prostora $\mathbf{V}$ nad poljem skalara $\mathbf{F}$ određuje skup

$$L(\{v_1, \ldots, v_n\}) = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}$$

koji nazivamo *lineal vektora* $v_1, \ldots, v_n$.

Teorema 1.6.1 Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ i neka su $v_1, \ldots, v_n \in V$ fiksirani vektori. Tada lineal $L(\{v_1, \ldots, v_n\})$ određuje vektorski potprostor vektorskog prostora $\mathbf{V}$.

Definicija 1.6.3 Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Za vektore $v_1, \ldots, v_n \in V$ kažemo da su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takvi da je bar jedan različit od nule i pri tom važi:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0.$$

Za vektore $v_1, \ldots, v_n \in V$ kažemo da su *linearno nezavisni* ukoliko nisu linearno zavisni.

Napomena 1.6.1 Važi:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ – linearno zavisni} \quad \text{akko} \quad \big(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n\big)\ \alpha_1\cdot v_1 + \ldots + \alpha_n\cdot v_n = 0 \ \wedge\ \neg(\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0)$$

i odatle negacijom zaključujemo[1]:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ – linearno nezavisni} \quad \text{akko} \quad \big(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n\big)\ \alpha_1\cdot v_1 + \ldots + \alpha_n\cdot v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

[1] linearna zavisnost je data formulom oblika $(\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge \neg Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,
negacijom linearna nezavisnost je određena sa $(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, \neg P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,
tj. linearna nezavisnost je određena sa formulom oblika $(\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Longrightarrow Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$;
na osnovu sledeće tautologije $\models \big(\neg P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \vee Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big) \iff \big(P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Longrightarrow Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big)$.

Teorema 1.6.2 Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Vektori $v_1, \ldots, v_n \in V$ su linearno zavisni akko je bar jedan od njih linearna kombinacija preostalih vektora.

Primer 1.6.1 Ispitajmo u relanom vektorskom prostoru $\mathbf{R}^3$ linearnu zavisnost vektora

$$\vec{a} = (1,0,0),\ \vec{b} = (0,1,0),\ \vec{c} = (1,1,r) \in R^3$$

u zavisnosti od realnog parametra $r \in R$. Polazimo od pretpostavke da je za $\alpha, \beta, \gamma \in R$ ispunjeno

$$(*) \qquad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0},$$

gde je $\vec{0} = (0,0,0)$. Tada važi

$$\begin{aligned} \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} &\iff \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(1,1,r) = (0,0,0) \\ &\iff (\alpha,0,0) + (0,\beta,0) + (\gamma,\gamma,\gamma r) = (0,0,0) \\ &\iff (\alpha+\gamma, \beta+\gamma, \gamma r) = (0,0,0) \\ &\iff \alpha+\gamma = 0 \ \wedge\ \beta+\gamma = 0 \ \wedge\ \gamma r = 0. \end{aligned}$$

Prelazimo na ispitivanje prirode rešenja homogenog linearnog sistema

$$(**) \qquad \begin{cases} \alpha + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ \gamma r = 0; \end{cases}$$

u zavisnosti od realnog parametra $r \in R$. Razlikujemo slučajeve:

1. $\boldsymbol{r = 0}$ Tada sistem $(**)$ ima rešenje

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-t, -t, t),$$

za proizvoljno $t \in R$. Samim tim postoje nenula vrednosti skalara α, β, γ tako važi $(*)$. Zaključak je da za $r = 0$ vektori $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$ i $\vec{c} = (1,1,0)$ su linearno zavisni. Primetimo, da u ovom slučaju kada je $r = 0$, sledeća očigledna jednakost $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ takođe potvrđuje linearnu zavisnost.

2. $\boldsymbol{r \neq 0}$ Tada sistem $(**)$ ima samo trivijalno rešenje

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0).$$

Zaključak je da za $r \neq 0$ vektori $\vec{a} = (1,0,0)$, $\vec{b} = (0,1,0)$ i $\vec{c} = (1,1,r)$ linearno nezavisni. □

Primer 1.6.2 Ispitati linearnu zavisnost vektora

(i) $a = 1,\ b = x,\ c = x^2$ u vektorksom prostoru $\mathbf{R}^2[x]$,

(ii) $a = 1,\ b = \cos^2 x,\ c = \sin^2 x$ u vektorksom prostoru $\mathbf{R}^R$.

Resenje. (i) Neka je $\mathtt{0}$ nula polinom. Iz implikacije

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2 = \mathtt{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

po $\alpha, \beta, \gamma \in R$, zaključujemo da su vektori $a = 1$, $b = x$ i $c = x^2$ linearno nezavisni u vektorskom prostoru $\mathbf{R}^2[x]$.

(ii) Na osnovu osnovne trigonometrijske jednakosti

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

zaključujemo da su vektori $a = 1$, $b = \cos^2 x$, $c = \sin^2 x$ linearno zavisni u vektorskom prostoru $\mathbf{R}^R$. □

1.7. Baza i dimenzija

Definicija 1.7.1 Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ jeste *generatorski skup* za vektorski prostor $\mathbf{V}$ ako važi $L(\{x_1, \ldots, x_n\}) = V$.

Definicija 1.7.2 Neka je $\mathbf{V}$ vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$. Skup vektora $\mathcal{B}=\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ jeste *bazni skup* (*baza*) za vektorski prostor $\mathbf{V}$ ako važi:

1°. Skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jeste generatortski, tj. $L(\{x_1, \ldots, x_n\})=V$.

2°. Skup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jeste linearno nezavisan skup vektora u V.

Primer 1.7.1 Vektori $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$ određuju jednu bazu vektorskog prostora $\mathbf{R}^3$. □

Primer 1.7.2 Vektori $a = 1$, $b = c$, $c = x^2$ određuju jednu bazu vektorskog prostora $\mathbf{R}^2[x]$. □

Definicija 1.7.3 Ako vektorski prostor ima bar jednu bazu koja sadrži konačno mnogo elemenata, tada se prostor naziva *konačno-dimenzionalni vektorski prostor*.

Teorema 1.7.1 Ako je $\mathbf{V}$ konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$, tada sve baze imaju isti broj elemenata.

Definicija 1.7.4 Ako vektorski prostor $\mathbf{V}$, takav da $V \neq \{0\}$, nad poljem skalara $\mathbf{F}$ ima bazu sa n elemenata, tada se prirodan broj n naziva *dimenzija konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora*. Koristimo oznaku $n = \dim(V)$.

Napomena 1.7.1 U slučaju trivijalnog vektorskog prostora $\mathbf{V}$, kada je $V = \{0\}$, smatramo da je nulte dimenzije, tj. $\dim(V) = 0$.

Primer 1.7.3 Važi $\dim\big(\mathbf{R}^3\big)=3$ i $\dim\big(\mathbf{R}^2[x]\big)=3$. □

Primer 1.7.4 U vektorskom prostoru $\mathbf{R}^4$ pokazati da skup vektora

$$W = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \,|\, \alpha_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_3 \,\wedge\, \alpha_4 = 0\}$$

određuje jedan vektorski potprostor i odrediti dimenziju tog potprostora.

Rešenje. Koristimo Teoremu 1.5.1. Posmatrajmo

proizvoljne vektore $x=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), y=(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\in W$ i proizvoljne realne sklare $\lambda, \mu \in R$.

Formirajmo linearnu kombinaciju

$$\begin{aligned}\lambda\, x + \mu\, y &= \lambda\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) + \mu\,(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)\\ &= \big(\underbrace{\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1}_{\gamma_1}, \underbrace{\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2}_{\gamma_2}, \underbrace{\lambda\alpha_3 + \mu\beta_3}_{\gamma_3}, \underbrace{\lambda\alpha_4 + \mu\beta_4}_{\gamma_4}\big) = \big(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\big) \in R^4\end{aligned}$$

za koju važi:

$$\gamma_2 = \lambda\alpha_2+\mu\beta_2 = \lambda(2\alpha_1+3\alpha_3) + \mu(2\beta_1+3\beta_3) = 2(\lambda\alpha_1+\mu\beta_1) + 3(\lambda\alpha_3+\mu\beta_3) = 2\gamma_1 + 3\gamma_3$$

i

$$\gamma_4 = \lambda\alpha_4 + \mu\beta_4 = \lambda 0 + \mu 0 = 0.$$

Samim tim

$$W \text{ jeste vektorski potporostor vektorskog prostora } \mathbf{R}^4.$$

Primetimo da za prozivoljni vektor $z = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in W$ važi

$$\begin{aligned}z = (\gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3,\, \gamma_4) &= (\gamma_1,\, 2\,\gamma_1 + 3\,\gamma_3,\, \gamma_3,\, 0)\\ &= (\gamma_1,\, 2\,\gamma_1,\, 0,\, 0) + (0,\, 3\,\gamma_3,\, \gamma_3,\, 0)\\ &= \gamma_1\,\underbrace{(1,\, 2,\, 0,\, 0)}_{e_1} + \gamma_3\,\underbrace{(0,\, 3,\, 1,\, 0)}_{e_2}.\end{aligned}$$

Odatle se jednostavno proverava da za vektorski potprostor $\mathbf{W}$ vektorskog prostora $\mathbf{R}^4$ vektori

$$e_1 = (1,\, 2,\, 0,\, 0) \quad \text{i} \quad e_2 = (0,\, 3,\, 1,\, 0)$$

su bazni, čime je $\dim\big(\mathbf{W}\big) = 2$. □

Napomena 1.7.2 Ako vektorski prostor nema konačnu bazu, tada za takve vektorske prostore pojam baze takođe može uvesti na odgovarajući način. Takvi prostori se nazivaju *beskonačno-dimenzionalni vektorski prostori*.

Primer 1.7.5 Vektorski prostor $\mathbf{R}^R$ je primer beskonačno-dimenzionalnog vektorskog prostora. □

Teorema 1.7.2 Neka je $\mathbf{V}$ konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ sa baznim skupom $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Svaki vektor $x \in V$ može se na tačno jedan način izraziti kao linearna kombinacija u odnosu na poredak baznih vektora $x_1, \dots, x_n$.

Napomena 1.7.3 Neka je $\mathbf{V}$ konačno-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem skalara $\mathbf{F}$ sa baznim skupom $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Za vektor $x \in V$ predstavljanje $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$, u odnosu na poredak baznih vektora $x_1, \dots, x_n$, određuje *koordinate* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *vektora* x *u bazi* $\mathcal{B}$.

1.8. Izomorfizmi vektorskih prostora

Definicija 1.8.1 Dva vektorska prostora $\mathbf{V_1} = (V_1, +_1, \cdot_1)$ i $\mathbf{V_2} = (V_2, +_2, \cdot_2)$ nad istim poljem skalara $\mathbf{F}$ su *homomorfni prostori* ako postoji preslikavanje $f : V_1 \longrightarrow V_2$ takvo da važi:

$$(\forall x, y \in V_1)(\forall \lambda, \mu \in F)\ f(\lambda \cdot_1 x +_1 \mu \cdot_1 y) = \lambda \cdot_2 f(x) +_2 \mu \cdot_2 f(y).$$

Preslikavanje f nazivamo *linearni operator ili homomorfizam vektorskog prostora* $\mathbf{V_1}$ *u vektorski prostor* $\mathbf{V_2}$. Posebno, ako je homomorfizam f bijekcija tada ga nazivamo *izomorfizam vektorskog prostora* $\mathbf{V_1}$ *u vektorski prostor* $\mathbf{V_2}$. Same vektorske prostore $\mathbf{V_1}$ i $\mathbf{V_2}$ smatramo *izomorfnim prostorima*, što označavamo $\mathbf{V_1} \cong \mathbf{V_2}$.

Teorema 1.8.2 Svaki n-dimenzionalni vektorski prostor $\mathbf{V}$ nad poljem skalara $\mathbf{F}$ izomorfan je vektorskom prostoru uređenih n-torki $\mathbf{F}^n$.

LITERATURA

M. Rašajski, B. Malešević, T. Lutovac, B. Mihailović, N. Cakić: "*Linearna algebra*", Akademska misao, Beograd 2017.