LINEARNA ALGEBRA

2. Sistemi linearnih jednačina

2.1. Definicija sistema linearnih jednačina

Neka je dato polje $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$. *Sistem linearnih jednačina*, nad poljem $\mathbf{F}$, za n-torku nepoznatih $(x_1, \ldots, x_n)$ nad poljem i konstante $a_{ij}, b_i \in F$ $\big(i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i $j \in \{1, 2, \ldots, n\}\big)$, jeste konjukcija jednačina

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}.$$

Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, tada sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se naziva *homogeni sistem*. U suprotom ako postoji $b_i \neq 0$, sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se naziva *nehomogeni sistem*. Skalare $b_1, b_2, \ldots, b_m \in F$ nazivamo slobodnim članovima sistema.

Sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se može napisati u matričnom obliku:

$$(\mathcal{S}) \qquad \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

pri čemu je $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ – *matrica koeficijenata*, $\mathsf{x} = [x_i]$ – *matrica kolona nepoznatih* nad $F^{n \times 1}$ i $\mathsf{b} = [b_i] \in F^{m \times 1}$ – *matrica kolona slobodnih članova*. Sistem lineanih jednačina $(\mathcal{S})$ naziva se *saglasan sistem* (neprotivurečan, moguć) ako postoji matrica kolona $\alpha = [\alpha_i] \in F^{n \times 1}$ takva da za $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$ konjukcija jednačina iz $(\mathcal{S})$ jeste tačna. Matrica kolona α se naziva *rešenje sistema linearnih jednačina* $(\mathcal{S})$. U suprotnom ako za sistem $(\mathcal{S})$ ne postoji rešenje, tada sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se naziva *nesaglasan sistem* (protivurečan, nemoguć).

3. Rang matrice

3.1. Definicija ranga matrice

U cilju diskusije saglasnosti – nesaglasnosti sistema linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ razmatra se pojam ranga.

Definicija 3.1.1 Neka je data matrica A formata $m \times n$ nad poljem $\mathbf{F}$, tj. $\mathsf{A} \in F^{m \times n}$. *Rang matrice* A jeste broj r, u oznaci $\mathrm{rang}(\mathsf{A}) = r$, takav da u matrici A postoji kvadratna regularna submatrica M reda r tako da su sve kvadratne submatrice većeg reda od r singularne. Matricu M nazivamo *glavnom submatricom.*

Napomena 3.1.1 Ako matrica $\mathsf{A} = \mathsf{0} = [\,0\,] \in F^{m \times n}$ jeste nula matrica, tada smatramo da je $r = 0$. U suprotnom, ako matrica $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{m \times n}$ nije nula matrica, tada $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Sveukupno za proizvoljnu matricu $\mathsf{A} \in F^{m \times n}$ važi

$$0 \leq \mathrm{rang}(\mathsf{A}) \leq \min\{m, n\}.$$

Primer 3.1.1 Dokazati:

(*i*)

Za matricu $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ važi $\mathrm{rang}(\mathsf{A}) = 2$.

(*ii*)

Za matricu $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ važi $\mathrm{rang}(\mathsf{B}) = 2$.

Rešenje. (*i*) Matrica $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ nije nula matrica odatle je $1 \leq \mathrm{rang}(\mathsf{A}) \leq 2$. Uočimo da postoji glavna submatrica

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

reda 2, samim tim $\mathrm{rang}(\mathsf{A}) = 2$.

(*ii*) Matrica $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ nije nula matrica odatle je $1 \leq \mathrm{rang}(\mathsf{B}) \leq 3$. Dalje, jednostavno se proverava

$$\mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

tj. kvadratna matrica B nije glavna submatrica. Samim tim $1 \leq \mathrm{rang}(\mathsf{B}) \leq 2$. Posle prethodne kratke analize o rangu matrice B jednostavno se nalazi primer glavne submatrice

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

reda 2, samim tim $\mathrm{rang}(\mathsf{B}) = 2$. □

Teorema 3.1.1 Za matricu $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$ važi $\mathrm{rang}(\mathsf{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{rang}(\mathsf{A})$.

Definicija 3.3.2 Za matricu $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$ *elementarne transformacije matrice* A su sledeće transformacije:

(i) Zamena mesta dve vrste (ili kolone).

(ii) Množenje jedne vrste (ili kolone) skalarom $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje elemenata jedne vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim skalarom α odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone).

Definicija 3.3.3 Matrice $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in F^{m\times n}$ su *ekvivaletne matrice*, što označavamo $A \cong B$, ako se mogu dobiti jedna iz druge pomoću konačnog broja elementarnih transformacija.

Teorema 3.3.2 Neka je data matrica $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$ i neka je matrica $\mathsf{A}' \in F^{m\times n}$ nastala zamenom i-te i j-te vrste (kolone). Tada važi:

$$\mathrm{rang}(\mathsf{A}') = \mathrm{rang}(\mathsf{A}).$$

Teorema 3.3.3 Neka je data matrica $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$ i neka je $\alpha \in F\backslash\{0\}$ proizvoljan ne-nula skalar. Tada:

$$\mathrm{rang}(\alpha\,\mathsf{A}) = \mathrm{rang}(\mathsf{A}).$$

Teorema 3.3.4 Neka je data matrica $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$ i neka su izdvojeni vektori vrste $v_i = \big[\, a_{i1} \,...\, a_{in} \,\big] \in F^{1\times n}$ $\big(i=1,\ldots,m\big)$. Ako je rang$(\mathsf{A}) = r$, tada među vektor vrstama v_i postoji tačno r linearno nezavisnih vektora tako da preostlih $m-r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Posledica 3.3.1 Važi rang$(\mathsf{A}) = \dim(V_v)$, gde $V_v = L\big(\{v_1,\ldots,v_m\}\big)$ određuje *vektorski prostor vrsta* $\mathbf{V}_{\boldsymbol{v}}$.

Teorema 3.3.4' Neka je data matrica $\mathsf{A}\in F^{m\times n}$ i neka su izdvojeni vektori kolone $w_j = \big[\, a_{1j} \,...\, a_{mj} \,\big]^{\mathrm{T}} \in F^{m\times 1}$ $\big(j=1,\ldots,n\big)$. Ako je rang$(\mathsf{A}) = r$, tada među vektor kolonama w_j postoji tačno r linearno nezavisnih vektora tako da preostlih $n-r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Posledica 3.3.1' Važi rang$(\mathsf{A}) = \dim(V_k)$, gde $V_k = L\big(\{w_1,\ldots,w_n\}\big)$ određuje *vektorski prostor kolona* $\mathbf{V}_{\boldsymbol{k}}$.

Teorema 3.3.5 Neka je data matrica $\mathsf{A} \in F^{m\times n}$ i neka je matrica $\mathsf{B} \in F^{m\times n}$ dobijena od matrice A tako što su elementima jedne vrste (kolone) matrice A dodati elementi neke druge vrste (kolone) pomnoženi skalarom $\alpha \in F$. Tada važi:

$$\mathrm{rang}(\mathsf{B}) = \mathrm{rang}(\mathsf{A}).$$

Teorema 3.3.6 Elementarne transformacije ne menjaju rang matrice.

4. Sistemi linearnih jednačina i rang matrice

4.1. Kroneker-Kapelijeva teorema

Definicija 4.1.1 Neka je dat sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$. *Elementarne transformacije sistema* $(\mathcal{S})$ su određene kao sledeće transformacije:

(i) Zamena mesta dve jednačine.

(ii) Množenje jedne jednačine skalarom $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje jedne jednačine, prethodno pomnožene nekim skalarom α odgovarajućoj drugoj jednačini.

Napomena 4.1.1 Za elementarnu transformaciju sistema linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ možemo uzeti i zamenu dva sabiraka u jednoj jednačini samo ako se odgovarajuće zamene izvrše u svim jednačinama sistema tako da se iste nepoznate pišu jedne ispod drugih. Ovom transformacijom se vrši zamena redosleda u nizu nepoznatih!

Teorema 4.1.1 Elementarnim transformacijama skup rešenja sistema $(\mathcal{S})$ se ne menja.

Za sistem linearnih jednačina

$$(\mathcal{S}) \qquad \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

matrice

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in F^{m\times n} \quad \text{i} \quad \mathsf{A}^{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in F^{m\times(n+1)}$$

nazivaju se *matrica sistema* i *proširena matrica sistema* respektivno. Tada važi sledeće tvrđenje

Teorema 4.1.2 (Kroneker – Kapeli) Sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ $Ax = b$ jeste saglasan ako i samo ako važi

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^b).$$

Primer 4.1.1 Kroneker–Kapelijevom teoremom ispitati saglasnost realnog sistema u zavisnosti od parametara α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \alpha, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = \beta, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = \gamma. \end{array} \right\}$$

U slučaju saglasnog sistema naći rešenje.

<u>Rešenje.</u> Polazeći od proširene matrice A^b zaključujemo da primenom elementarnih transformacija važi[†]:

$$A^b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 4 & 5 & 6 & \beta \\ 7 & 8 & 9 & \gamma \end{array} \right] \qquad \big(I_2 := (-4)\cdot I_1 + I_2,\ I_3 := (-7)\cdot I_1 + I_3\big)$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 0 & -3 & -6 & \beta - 4\alpha \\ 0 & -6 & -12 & \gamma - 7\alpha \end{array} \right] \qquad \big(I_3 := (-2)\cdot I_2 + I_3\big)$$

$$\cong \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 0 & -3 & -6 & \beta - 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - 2\beta + \alpha \end{array} \right].$$

Dakle, saglasno Kroneker–Kapelijevoj teoremi, posmatrani sistem je saglasan ako i samo ako je

$$\gamma = 2\beta - \alpha.$$

Za tako određenu vrednost parametra γ rešenje ekvivalentnog sistema

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& \alpha, \\ -3x_2 - 6x_3 &=& \beta - 4\alpha \end{array} \right\}$$

je dato u obliku

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = \Big(-\frac{5}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta + x_3,\ \frac{4}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - 2x_3,\ x_3 \Big),$$

za $x_3 \in \mathbb{R}$. □

4.2. Gausov algoritam

Teorema 4.2.1 Svaki sistem linearnih jednačina:

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ &\vdots& \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &=& b_m \end{array} \right\},$$

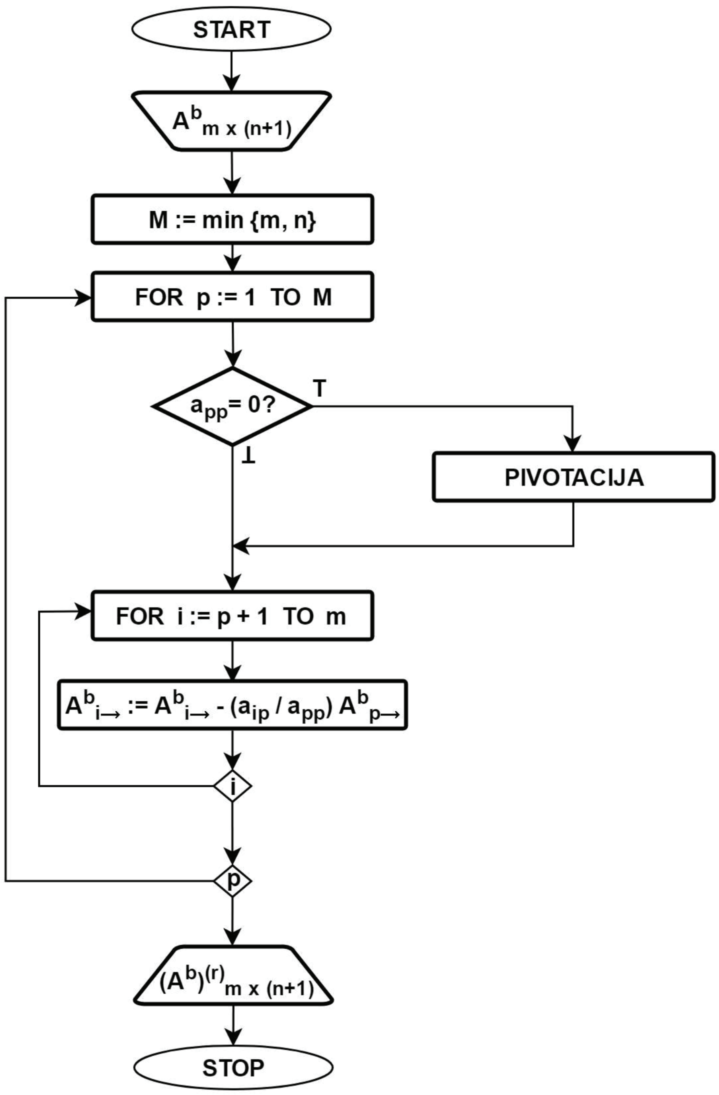
[†] pri čemu ovde sa I_p i J_q označavamo redom p-tu vrstu i q-tu kolonu razmatrane matrice

za $a_{ij}, b_i \in F$ $(i = 1, ..., m \wedge j = 1, ..., n)$, može se elementarnim transformacijama dovesti do ekvivaletnog trougaonog sistema

$$(\mathcal{S}_T) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1r}y_r & = & q_1 - p_{1(r+1)}y_{r+1} - \ldots - p_{1n}y_n \\ p_{22}y_2 + \ldots + p_{2r}y_r & = & q_2 - p_{2(r+1)}y_{r+1} - \ldots - p_{2n}y_n \\ & \vdots & \\ p_{rr}y_r & = & q_r - p_{r(r+1)}y_{r+1} - \ldots - p_{rn}y_n \\ 0 & = & \mu \end{array} \right\}$$

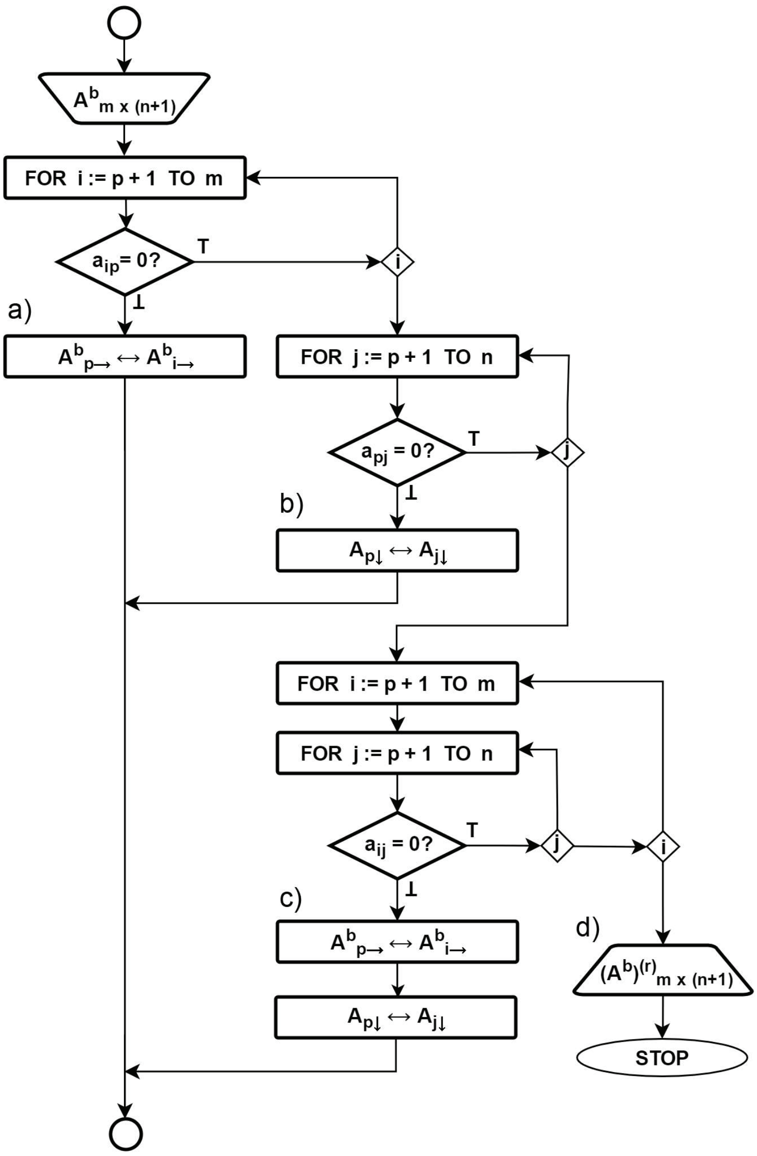
za $p_{ij}, q_i \in F$ $(i = 1, ..., r \wedge j = i, ..., n)$, $\mu \in F$ i $r = \mathrm{rang}(\mathsf{A}) \leq n$, gde je A matrica sistema. Pri tome je $p_{11} \cdot p_{22} \cdot \ldots \cdot p_{rr} \neq 0$ i $(y_1, \ldots, y_n)$ predstavlja jednu permutaciju od $(x_1, \ldots, x_n)$.

Postoji više načina da se polazni sistem $(\mathcal{S})$ transformiše u trougaoni sistem $(\mathcal{S}_T)$, najčešće se to ostvaruje *Gausovim algoritmom* predstavljenim sledećim dijagramom toka



Gausov algoritam

Procedura pivotacije koja se javlja u Gausovom algoritmu je data dijagramom



Procedura pivotacije

Napomena 4.2.1 Sistem $(\mathcal{S})$ je saglasan ako i samo ako je $\mu=0$. Ako je sistem $(\mathcal{S})$ homogen tada je $q_1=\ldots=q_r=\mu=0$. Na osnovu ovoga zaključujemo da je svaki homogen sistem saglasan, što je takođe i jedna od posledica Kroneker–Kapelijeve teoreme.

Primer 4.2.1 Odrediti za koje je vrednosti parametra $c\in\mathbb{R}$ sledeći realan sistem saglasan:

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2\ +\ 4x_3+5x_4 &=& 13, \\ 4x_1+6x_2\ +\ 9x_3+9x_4 &=& 26, \\ 4x_1+6x_2+8x_3+10x_4 &=& c. \end{array} \right\}$$

U slučaju kad je prethodni sistem saglasan rešiti sistem.

Rešenje. Sistem rešavamo pomoću proširene matrice sistema, vršeći redom elementarne transformacije (koje su naznačene pored proširene matrice sistema):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 13 \\ 4 & 6 & 9 & 9 & 26 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & c \end{array}\right] \qquad \big(I_2 := (-2)\cdot I_1 + I_2,\ \ I_3 := (-2)\cdot I_1 + I_3\big)$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-26 \end{array}\right],$$

$$\big(J_2 \longleftrightarrow J_3\big)$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-26 \end{array}\right].$$

Iz prethodne proširene matrice sistema dobijamo trougaoni sistem koji je ekvivalentan polaznom:

$$(*)_T \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_3 & = & 13 - 3x_2 - 5x_4, \\ x_3 & = & 0 + x_4, \\ 0 & = & c - 26. \end{array} \right\}$$

Prethodni sistem je saglasan samo ako je $c=26$ i u tom slučaju rešenje polaznog sistema je

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = \Big(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{9}{2}x_4,\ x_2,\ x_4,\ x_4\Big),$$

za $x_2,\, x_4 \in \mathbb{R}$. □

4.3. Slučaj homogenih linearnih sistema

Za matricu koeficjenata $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ i matricu kolonu nepoznatih $x = [x_i]$ nad $F^{n\times 1}$ neka je dat homogeni linearni sistem

$$(\mathcal{S}_0) \qquad Ax = 0 \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Saglasno Kroneker–Kapelijevoj teoremi ili po Gausovom algoritmu linearan sistem $(\mathcal{S}_0)$ je uvek saglasn i ima rešenje. Jedno takvo rešenje je matrica kolona $0 = [\,0,\, \dots,\, 0\,]^{\mathrm{T}} \in F^{n\times 1}$ koju nazivamo *trivijalno rešenje*. Sa sledećom teoremom određujemo kada homogeni sistem ima i druga, takozvana *netrivijalna rešenja*.

Teorema 4.3.1 Neka je $(\mathcal{S}_0)$ saglasan homogen linearan sistem sa m jednačina i n nepoznatih. Neka je r rang matrice sistema $\big(0 \le r \le \max\{m, n\}\big)$. Tada

(i) Sistem ima jedinstveno trivijalno rešenje ako i samo ako važi $r = n$, tj. ako je rang matrice sistema jednak broju nepoznatih.

(ii) Ako je $r < n$ sistem ima i netrivijalna rešenja i pri tom rešenje sistema se određuje preko $n - r$ slobodnih promenljivih.

Teorema 4.3.2 Skup svih rešenja homogenog sistema $(\mathcal{S}_0)$ ima strukturu vektorskog prostora.

Primer 4.3.1 Ispitati da li realni homogeni sistem:

$$(*)_0 \qquad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0; \end{array} \right\}$$

ima netrivijalna rešenja i ako ih ima naći sva netrivijalna rešenja i odrediti bazne vektore za vektorski prostor rešenja ovog homogenog linearnog sistema.

Rešenje. Sistem razmatran u Primeru 4.1.1, pri izboru $\alpha = \beta = \gamma = 0$, svodi se na ovaj sistem. Primetimo da za rang $r = \mathrm{Rang}(\mathsf{A})$ važi $r = 2 < 3 = n$. Samim tim, ovaj sistem ima netrivijalna rešenja. Takođe na osnovu u Primera 4.1.1 posmatrani sistem je ekvivalntan sa sistemom

$$(**)_0 \qquad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

i odatle nalazimo netrivijalna rešenja u obliku

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_3,\ -2x_3,\ x_3)\,,$$

za $x_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pored netrivijalnih rešenja za prethodni homogeni sistem postoji i trivijalno rešenje:

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (0,\ 0,\ 0).$$

Skup rešenja prethodnog homogenog linearnog sistema je

$$V = \big\{\,(t,\ -2t,\ t)\,|\,t\in\mathbb{R}\,\big\} = \big\{\,t\cdot(1,\ -2,\ 1)\,|\,t\in\mathbb{R}\,\big\}.$$

Skup V određuje realni jednodimenzionalni vektorski potprostor vektorskog prostora $\mathbf{R^3} = (\mathbb{R}^3, \mathbf{R})$ i ima bazni vektor $\vec{e} = (1, -2, 1)$. □

5. Karakteristični koreni i vektori

5.1. Definicija karakterističnih korena i vektora

Neka je $\mathbf{F} = (F, \cdot, +)$ polje i neka je data kvadratna matrica $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$. Glavni predmet proučavanja ovog dela su skalari $\lambda \in F$ i ne-nula matrice kolone $\mathsf{x} = [\,x_1\ \ldots\ x_n\,]^T \in F^{n\times 1}$ koji ispunjavaju karakterističnu jednačinu

$$\mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x},$$

tj. za koje važi:

$$(\mathcal{K}) \qquad (\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I})\mathsf{x} = \mathbb{0} \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + \quad a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = \ 0 \\ a_{21}x_1 & + \ (a_{22}-\lambda)x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = \ 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \quad a_{n2}x_2 & + \ldots + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = \ 0 \end{array} \right\}.$$

Definicija 5.1.1 Za kvadratnu matricu $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ homogeni sistem $(\mathcal{K})$ se naziva *karakterističan* (*sopstveni*) *sistem matrice* A. Skalar $\lambda \in F$ se naziva *karakteristična* (*sopstvena*) *vrednost matrice* A ako za taj skalar karakterističan sistem ima netrivijalno rešenje $\mathsf{x} = [\,x_1\ \ldots\ x_n\,]^T \in F^{n\times 1}$. Tada kažemo da je x *karakteristični* (*sopstveni*) *vektor matrice* A koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ.

Primetimo da potreban i dovoljan uslov da karakterističan sistem $(\mathcal{K})$ ima netrivijalno rešenje je dat sa jednakošću

$$|\mathsf{A} - \lambda\mathrm{I}| = 0.$$

Prethodnom jednakošću je određen jedan polinom po λ koji određujemo sledećom definicijom.

Definicija 5.1.2 Za kvadratnu matricu $\mathsf{A}=[a_{ij}]\in F^{n\times n}$ polinom

$$P_n(\lambda)=|\mathsf{A}-\lambda\mathrm{I}|=\begin{vmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda)\end{vmatrix}$$

se naziva *karakteristični* (*sopstveni*) *polinom matrice A*. Koreni karakterističnog polinoma se nazivaju *karakteristični* (*sopstveni*) *koreni matrice A* i skup svih tih korena određuju *spektar matrice A*.

Napomenimo da za matricu $\mathsf{A}=[a_{ij}]\in F^{n\times n}$ pojmovi karakteristične vrednosti i karakterističnog korena se podudaraju. Skup skalara $\lambda\in F$ koji predstavljaju karakteristčne vrednosti, odnosno karakteristične korene matrice A je konačan i određen je spektrom matrice A. Za svaki skalar $\lambda\in F$ izvan spektra matrice, homogeni sistem $(\mathcal{K})$ ima samo trivijalno rešenje $\mathsf{x}=\mathsf{0}$ u $F^{n\times 1}$.

Definicija 5.1.3 Za kvadratnu matricu $\mathsf{A}=[a_{ij}]\in F^{n\times n}$ *karakteristični* (*sopstveni*) *potprostor matrice A*, koji odgovara karakterističnoj vrednosti λ, jeste skup svih vektora x u $F^{n\times 1}$ koji su rešenje karakterističnog sistema uključujući i nula vektor $\mathsf{x}=\mathsf{0}$ u $F^{n\times 1}$.

Primer 5.1.1 Odrediti karakteristične vrednosti, vektore i potprostore sledećih matrica:

(i)
$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix},$$
(ii)
$$\mathsf{B}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$
(iii)
$$\mathsf{C}=\begin{bmatrix}2 & -10 & 6\\ 8 & -15 & -1\\ 16 & -15 & 3\end{bmatrix}.$$

Rešenje. ***(i)*** Za matricu A karakteristični polinom

$$\begin{aligned}P_3(\lambda)=&\begin{vmatrix}(3-\lambda) & 2 & 0\\ 2 & (4-\lambda) & -2\\ 0 & -2 & (5-\lambda)\end{vmatrix}\\ &=(3-\lambda)\cdot(4-\lambda)\cdot(5-\lambda)+2\cdot(-2)\cdot 0+0\cdot 2\cdot(-2)\\ &-0\cdot(4-\lambda)\cdot 0-(-2)\cdot(-2)\cdot(3-\lambda)-(5-\lambda)\cdot 2\cdot 2\\ &=-\lambda^3+12\,\lambda^2-47\,\lambda+60-12+4\,\lambda-20+4\,\lambda\\ &=-\lambda^3+12\,\lambda^2-39\,\lambda+28\end{aligned}$$

ima tri realna i različita korena

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=7.$$

Prvom karakterističnom korenu $\lambda_1=1$ odgovara homogeni karakteristični sistem

$$(*)_0\qquad\left\{\begin{array}{rrrl}(3-\lambda_1)\,\alpha & +\ (2)\,\beta & & =\ 0,\\ (2)\,\alpha & +\ (4-\lambda_1)\,\beta & +\ (-2)\,\gamma & =\ 0,\\ & (-2)\,\beta & +\ (5-\lambda_1)\,\gamma & =\ 0;\end{array}\right\}$$

koji rešavamo po $\mathsf{v}_1=(\alpha,\beta,\gamma)$. Primenimo Gausov algritam za rešavanje prethodnog homogenog linearnog sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} (3-\lambda_1)\,\alpha + & 2\,\beta & & =0 \\ 2\,\alpha & +(4-\lambda_1)\,\beta - & 2\,\gamma & =0 \\ & -2\,\beta & +(5-\lambda_1)\,\gamma & =0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rl} 2\alpha+2\beta & =0 \\ 2\alpha+3\beta-2\gamma & =0 \\ -2\beta+4\gamma & =0 \end{array}\right\} \quad (I_2 := (-1)I_1 + I_2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 2\alpha+2\beta & =0 \\ \beta-2\gamma & =0 \\ -2\beta+4\gamma & =0 \end{array}\right\} \quad (I_3 := 2I_2 + I_3)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 2\alpha+2\beta & =0 \\ \beta-2\gamma & =0 \\ 0 & =0 \end{array}\right\}$$

Odatle, rešenje homogenog karakterističnog sistema je uređena trojka $\mathbf{v}_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ koja ispunjava

$(**)_0$
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha+2\beta & = & 0, \\ \beta-2\gamma & = & 0. \end{array}\right\}$$

Dovoljno je birati $\gamma = 1$ jer tada

$$\gamma = 1 \implies \beta = 2,\ \alpha = -2.$$

Samim tim prvom karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara prvi karakteristični vektor

$$\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i prvi karakteristični potprostor

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Drugom karakterističnom korenu $\lambda_2 = 4$ odogovara drugi karakteristični vektor

$$\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i drugi karakteristični potprostor

$$V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Trećem karakterističnom korenu $\lambda_3 = 7$ odogovara treći karakteristični vektor

$$\vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

i treći karakteristični potprostor

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Za matricu B karakteristični polinom

$$P_3(\lambda)=\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (3-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&=(3-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)+1\cdot1\cdot0+1\cdot1\cdot0\\
&-0\cdot(3-\lambda)\cdot1-0\cdot1\cdot(3-\lambda)-(2-\lambda)\cdot1\cdot1\\
&=-\lambda^3+8\,\lambda^2-21\,\lambda+18-2+\lambda\\
&=-\lambda^3+8\,\lambda^2-20\,\lambda+16
\end{aligned}$$

ima realne korene od kojih je jedan dvostruk

$$\lambda_{1,2}=2 \quad \text{i} \quad \lambda_3=4.$$

Prvom i drugom karakterističnom korenu $\lambda_{1,2}=2$ odgovara homogeni karakteristični sistem

$$(*)_0 \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} (3-\lambda_{1,2})\,\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0, \\ \alpha & + & (3-\lambda_{1,2})\,\beta & + & \gamma & = & 0, \\ & & & & (2-\lambda_{1,2})\,\gamma & = & 0; \end{array}\right\}$$

koji rešavamo po $\nu_{1,2}=(\alpha,\beta,\gamma)$. Primenimo Gausov algritam za rešavanje prethodnog homogenog linearnog sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (3-\lambda_{1,2})\,\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & (3-\lambda_{1,2})\,\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & & & (2-\lambda_{1,2})\,\gamma & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \quad (I_2:=(-1)I_1+I_2)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

Odatle, rešenje homogenog karakterističnog sistema je uređena trojka $\nu_{1,2}=(\alpha,\beta,\gamma)$ koja ispunjava

$$(**)_0 \qquad \{\,\alpha+\beta+\gamma=0.\,\}$$

Samim tim rešenje možemo predstaviti u obliku

$$\nu_{1,2}\;=\;(\alpha,\beta,-\alpha-\beta)\;=\;\alpha\,\underbrace{(1,0,-1)}_{\nu_1}+\beta\,\underbrace{(0,1,-1)}_{\nu_2},$$

za $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Birajući $\alpha=1$ i $\beta=0$, odnosno $\alpha=0$ i $\beta=1$ dobijamo bazna rešenja

$$\nu_1=(1,0,-1) \quad \text{i} \quad \nu_2=(0,1,-1)$$

koja određuju bazne karakteristične vektore

$$\vec{\nu}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \vec{\nu}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

koji su linearno nezavisni i generišu karakteristični potprostor

$$V_{1,2}=\left\{\begin{bmatrix} p\\ q\\ -p-q\end{bmatrix} \;:\; p,q\in\mathbb{R}\right\}.$$

Trećem karakterističnom korenu $\lambda_3=4$ odogovara treći karakteristični vektor

$$\vec{v}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

i treći karakteristični potprostor

$$V_3=\left\{\begin{bmatrix}t\\t\\0\end{bmatrix}\;:\;t\in\mathbb{R}\right\}.$$

(iii) Za matricu C karakteristični polinom

$$\begin{aligned}
P_3(\lambda)=&\begin{vmatrix}(2-\lambda) & -10 & 6\\ 8 & (-15-\lambda) & -1\\ 16 & -15 & (3-\lambda)\end{vmatrix}\\
&=(2-\lambda)\cdot(-15-\lambda)\cdot(3-\lambda)+(-10)\cdot(-1)\cdot 16+6\cdot 8\cdot(-15)\\
&-16\cdot(-15-\lambda)\cdot 6-(-15)\cdot(-1)\cdot(2-\lambda)-(3-\lambda)\cdot 8\cdot(-10)\\
&=(-\lambda^3-10\,\lambda^2+69\,\lambda-90)+(160)+(-720)\\
&-(-96\lambda-1440)-(-15\lambda+30)-(80\lambda-240)\\
&=-\lambda^3-10\,\lambda^2+100\,\lambda+1000
\end{aligned}$$

ima realne korene od kojih je jedan dvostruk

$$\lambda_{1,2}=-10\quad \text{i}\quad \lambda_3=10.$$

Dvostrukom karakterističnom korenu $\lambda_{1,2}=-10$ odgovara homogeni karakteristični sistem

$$(*)_0\qquad \left\{\begin{array}{ccccccc}(2-\lambda_{1,2})\,\alpha & - & 10\,\beta & + & 6\,\gamma & = & 0,\\ 8\,\alpha & + & (-15-\lambda_{1,2})\,\beta & - & \gamma & = & 0,\\ 16\,\alpha & - & 15\,\beta & & (3-\lambda_{1,2})\,\gamma & = & 0;\end{array}\right\}$$

koji rešavamo po $\mathrm{v}_{1,2}=(\alpha,\beta,\gamma)$. Primenimo Gausov algritam za rešavanje prethodnog homogenog linearnog sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}(2-\lambda_{1,2})\alpha & - & 10\beta & + & 6\gamma & = & 0\\ 8\alpha & + & (-15-\lambda_{1,2})\beta & - & \gamma & = & 0\\ 16\alpha & - & 15\beta & & (3-\lambda_{1,2})\gamma & = & 0\end{array}\right\}$$

$$\iff\quad\left\{\begin{array}{l}12\alpha-10\beta+\;6\gamma\;=0\\ 8\alpha\;-\;5\beta\;-\;\;\gamma\;=0\\ 16\alpha-15\beta+13\gamma=0\end{array}\right\}\qquad \left(I_2:=(-\tfrac{8}{12})I_1+I_2,\ I_3:=(-\tfrac{16}{12})I_1+I_3\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} 12\alpha - 10\beta + 6\gamma &= 0 \\ \tfrac{5}{3}\beta \ - 5\gamma &= 0 \\ -\ \tfrac{5}{3}\beta \ + 5\gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \big(I_3 := (-1)I_2 + I_3\big)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} 12\alpha - 10\beta + 6\gamma &= 0 \\ \tfrac{5}{3}\beta \ - 5\gamma &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Odatle, rešenje homogenog karakterističnog sistema je uređena trojka $v_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ koja ispunjava

$$(**)_0 \qquad \left\{ \begin{aligned} 12\alpha - 10\beta + 6\gamma \ &= \ 0, \\ \frac{5}{3}\beta - 5\gamma \qquad &= \ 0. \end{aligned} \right\}$$

Dovoljno je birati $\beta = 3$ jer tada

$$\beta = 3 \implies \gamma = 1,\ \alpha = 2.$$

Samim tim dvostrukom karakterističnom korenu $\lambda_{1,2} = -10$ odgovara karakteristični vektor

$$\vec{v}_{1,2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i karakteristični potprostor

$$V_{1,2} = \left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Jednostrukom karakterističnom korenu $\lambda_3 = 10$ odogovara karakteristični vektor

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

i karakteristični potprostor

$$V_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 4t \\ t \\ -7t \end{bmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Primetimo da je u ovom primeru dimenzija karakterističnog potprostora $\dim(V_{1,2}) = 1$ manja od reda višestrukosti $r = 2$ karakterističnog korena $\lambda_{1,2}$. □

5.2. Kejli-Hamiltonova teorema i minimalni polinom

Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ i skalari $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ $(\alpha_n \neq 0)$. Tada izraz

$$P_n(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

se naziva *matrični polinom* stepena n.

Teorema 5.2.1 (Kejli–Hamilton) Neka je za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n \times n}$ određen karakteristični polinom:

$$P_n(\lambda) = |A - \lambda I| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k,$$

za koeficijente $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \in F$ $(\alpha_n \neq 0)$, tada važi

$$P_n(\mathsf{A}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathsf{A}^k = \mathsf{0}.$$

Napomena 5.2.1 Neka je za kvadratnu matricu $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ određen karakteristični polinom:

$$P_n(\lambda) = |\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k,$$

tada važi:

$$\alpha_n = (-1)^n, \quad \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(\mathsf{A}) \quad \text{i} \quad \alpha_0 = |\mathsf{A}|$$

gde je $\mathrm{Tr}(\mathsf{A}) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ – *trag matrice* A.

Definicija 5.2.1 Kvadratne matrice $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in F^{n\times n}$ su *slične matrice*, što označavamo $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, ako postoji regularna matrica $\mathsf{C} \in F^{n\times n}$ takva da važi $\mathsf{B} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\ \mathsf{C}$.

Teorema 5.2.2 Sličnost matrica jeste relacija ekvivalencije skupa matrica $F^{n\times n}$.

Teorema 5.2.3 Slične matrice imaju isti spektar.

Definicija 5.2.2 Neka je data kvadratna matrica $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$, tada polinom $m(\lambda)$ takav da ispunjava uslove:

(*i*) $m(\mathsf{A}) = 0$,

(*ii*) koeficijent uz najveći stepen polinoma $m(\lambda)$ jednak je 1,

(*iii*) $m(\lambda)$ je polinom najmanjeg stepena za koje važe prethodni uslovi (*i*) i (*ii*);

naziva se *minimalni polinom matrice* A.

Teorema 5.2.4 Svaka kvadratna matrica $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ ima jedinstven minimalan polinom $m(\lambda)$ i on je delilac karakterističnog polinoma $P_n(\lambda) = |\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}|$.

Teorema 5.2.5 Neka je data kvadratna matrica $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$. Svaka nula karakterističnog polinoma $P_n(\lambda)$ je i nula minimalnog polinoma $m(\lambda)$.

Napomena 5.2.2 Nule minimalnog i karakterističnog polinoma se podudaraju i mogu se razlikovati samo svojim redom.

Algoritam za određivanje minimalnog polinoma matrice $\mathsf{A} = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$:

1°. Prvo odredimo karakteristični polinom $P_n(\lambda) = |\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}|$.

2°. Izvršimo faktorizaciju polinoma $P_n(\lambda)$ na nerastavljive faktore.

3°. Formirajmo sve moguće delitelje karakteristčnog polinoma tako da sadrže sve korene karakterističnog polinoma i da su jediničnog vodećeg koeficijenta.

4°. Među prethodno određenim deliteljima izdvajamo one polinome koji se anuliraju u matrici A.

5°. Minimalni polinom je polinom najnižeg stepena među polinomima određenim u prethodnom koraku.

Primer 5.2.1 Odrediti minimalni polinom matrice:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in R^{3\times 3}.$$

Rešenje. Primenom prethodnog algoritma nalazimo:

1°. $P_3(\lambda) = |\mathsf{A} - \lambda \mathrm{I}| = -\lambda^3 + 3\lambda^2$.

2°. $P_3(\lambda) = -\lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda - 3)$.

3°. Delitelji $g(\lambda) = \lambda(\lambda - 3) = \lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3) = \lambda^3 - 3\lambda^2$ karakterističnog polinoma $P_3(\lambda)$ sadrže sve korene karakterističnog polinoma i jediničnog su vodećeg koeficijenta.

4°. Za oba polinoma $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2$ važi $g(\mathsf{A}) = \mathsf{A}^2 - 3\mathsf{A} = \mathsf{0}$ (proveriti) i $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A}^3 - 3\mathsf{A}^2 = \mathsf{0}$.

5°. Minimalni polinom je $m(\lambda) = g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$.

LITERATURA

M. Rašajski, B. Malešević, T. Lutovac, B. Mihailović, N. Cakić: "*Linearna algebra*", Akademska misao, Beograd 2017.